MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS

EVAU MODELO 2025

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Modelo 2025

Ejercicio 1A (2.5 *puntos*)

Considere las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Razone si A tiene inversa. En caso afirmativo, calcúlela.

b) (0.5 puntos) Calcule $C - 3B$.

c) (1 punto) Resuelve la ecuación $AX + 3B = C$.

(Cantabria - Matemáticas II - Modelo 2025 - Opción A)

Solución.

a) $|A| = 1 \neq 0 \implies \exists\, A^{-1} \quad \& \quad \operatorname{Adj} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $C - 3B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 6 & 2 \\ -1 & 5 & -5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $AX + 3B = C \implies AX = C - 3B \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot (C - 3B)$

$$\implies \boxed{X = A^{-1} \cdot (C - 3B)}$$

$$X = A^{-1} \cdot (C - 3B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 6 & 2 \\ -1 & 5 & -5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -3 \\ -5 & 11 & -8 \\ 10 & -11 & 3 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 1B (2.5 *puntos*)

Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 2 \\ -2x + 2z = 0 \\ -x - 3y + 3z = a \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$.
Determine si este sistema es incompatible, compatible determinado o compatible indeterminado en el caso de que:

a) (1.25 puntos) $a = 2$. Resuélvalo si es compatible.

b) (1.25 puntos) $a = 8$. Resuélvalo si es compatible.

(Cantabria - Matemáticas II - Modelo 2025 - Opción B)

Solución.

Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & a \end{array}\right)$$

- Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

  $|A| = 0 \; \forall a \in \mathbb{R} \implies \text{ran}\, A < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}\, A = 2$

  $$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & a \end{vmatrix} = 2 \cdot (6 - 3a) = 0 \implies a = 2$$

- Si $a \neq 2 \implies |A^*| \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA INCOMPATIBLE ($\nexists$ Solución)

- Si $a = 2 \implies |A^*| = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ SIST. COMP. INDET. (∞ Sol.)

a) Resolvemos el sistema para $a = 2$. Teniendo en cuenta que se trata de un S.C.I. solo es necesario resolver las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero de la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow \lambda - 3y + \lambda = 2 \\ \Rightarrow -2x + 2\lambda = 0 \\ \Rightarrow z = \lambda \end{array} \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \dfrac{2\lambda - 2}{3} \; , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

b) Si $a = 8 \neq 2 \implies \nexists$ Solución pues el sistema es incompatible.

Ejercicio 2A (2.5 *puntos*)

Considere la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 9x & , \textit{si } x \leq 3 \\ \ln\left(x^2 - 9\right) & , \textit{si } x > 3 \end{cases}$$

donde ln *denota al logaritmo neperiano.*

a) *(0.5 puntos) Determine el dominio de definición de $f(x)$.*

b) *(0.75 puntos) Determine los intervalos de continuidad de $f(x)$.*

c) *(0.5 puntos) Halle los puntos de corte de $f(x)$ con el eje OX de abscisas.*

d) *(0.75 puntos) Calcule la(s) asíntotas(s) de $f(x)$ y diga de qué tipo(s) es(son), si la(s) tiene.*

(Cantabria - Matemáticas II - Modelo 2025 - Opción A)

Solución.

a)
- Si $x \leq 3 \implies \text{Dom}(f_1) = (-\infty, 3]$ porque es un polinomio
- Si $x > 3 \implies x^2 - 9 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty) \implies \text{Dom}(f_2) = (3, +\infty)$

Por lo tanto $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

b) Dado que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ solo queda estudiar la continuidad en $x = 3$.

- $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3}(x^3 - 6x^2 + 9x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \ln\left(x^2 - 9\right) = -\infty$

Luego la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{3\}$, en donde tiene una discontinuidad inevitable de salto infinito.

c) $$f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 9 = x \cdot (x^2 - 6x + 9) \implies x = \{0, 3\} \implies (0,0) \ \& \ (3,0) \\ \ln\left(x^2 - 9\right) = 0 \implies x^2 - 9 = 1 \implies \begin{cases} \cancel{x = -\sqrt{10}} \notin (3, +\infty) \\ x = \sqrt{10} \implies (\sqrt{10}, 0) \end{cases} \end{cases}$$

d)
- `A. Vertical:` $\exists A.V.$ en $x = 3^+$ tal y como se vio en el apartado a).
  - $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$
- `A. Horizontal:` $\nexists A.H.$
  - $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3 - 6x^2 - 9x) = -\infty$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(x^2 - 9\right) = +\infty$
- `A. Oblicua:` $\nexists A.O.$ pues una rama es un polinomio y la otra un logaritmo.

Ejercicio 2B (2.5 *puntos*)

Considere la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

a) *(0.5 puntos) Determine la parte del dominio de definición de* $f(x)$ *en que es decreciente.*

b) *(1 punto) Determine la parte del dominio de definición de* $f(x)$ *en que es cóncava.*

c) *(1 punto) Determine los puntos de inflexión de* $f(x)$.

(Cantabria - Matemáticas II - Modelo 2025 - Opción B)

Solución.

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{x^2+1-x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = 0 \implies 1-x^2=0 \implies x=\pm 1$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
Signo $f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

La función $f(x)$ es *decreciente* en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

b) $$f''(x) = \frac{-2x\cdot\left(x^2+1\right)^{\cancel{2}} - \left(1-x^2\right)\cdot 2\cdot\cancel{\left(x^2+1\right)}\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{2x^3-6x}{\left(x^2+1\right)^3} = 0$$

$$\implies 2x^3-6x=0 \implies 2x\cdot\left(x^2-3\right)=0 \implies \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

	$\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$	$\left(-\sqrt{3},0\right)$	$\left(0,\sqrt{3}\right)$	$\left(\sqrt{3},+\infty\right)$
Signo $f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Cóncava $\cap$	Convexa $\cup$	Cóncava $\cap$	Convexa $\cup$

La función $f(x)$ es *cóncava* ($\cap$) en $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(0,\sqrt{3}\right)$.

c) La función $f(x)$ tiene puntos de inflexión en $\left(-\sqrt{3},-\sqrt{3}/4\right)$, $(0,0)$ y $\left(\sqrt{3},\sqrt{3}/4\right)$.

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Considere el punto $P(1,5,0)$ *y la recta* $r \equiv \begin{cases} x+y-2=0 \\ 2x-z-1=0 \end{cases}$

a) *(0.75 puntos) Obtenga la ecuación de la recta paralela a* r *que pase por el punto* P.

b) *(1.25 puntos) Considere un punto* P' *en* r *y un vector dirección de* r. *Calcule el área del paralelogramo determinado por* $\overrightarrow{PP'}$ *y el vector dirección de* r *elegido.*

c) *(0.5 puntos) Calcule la distancia entre* P *y* r.

(Cantabria - Matemáticas II - Modelo 2025

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} R(2,0,3) \\ \vec{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1,1,-2) \end{cases} \Longrightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3-2\lambda \end{cases} \quad , \ \lambda \in \mathbb{R}$$

a) $s \equiv \begin{cases} P(1,5,0) \\ \vec{d_s} = \vec{d_r} = (-1,1,-2) \end{cases} \Longrightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1-\mu \\ y = 5+\mu \\ z = -2\mu \end{cases} \quad , \ \mu \in \mathbb{R}$

b) $P' \in r \Longrightarrow P'(2-\lambda, \lambda, 3-2\lambda) \Longrightarrow \overrightarrow{PP'} = (1-\lambda, -5+\lambda, 3-2\lambda)$

$\text{Área} = \left|\overrightarrow{PP'} \times \vec{d_r}\right| = |\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1-\lambda & -5+\lambda & 3-2\lambda \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}| = |(7,-1,-4)| = \sqrt{66}\ u^2$

c) $d(P,r) = \dfrac{\left|\overrightarrow{PP'} \times \vec{d_r}\right|}{\left|\vec{d_r}\right|} = \dfrac{\sqrt{66}}{\sqrt{6}} = \sqrt{11}\ u$

Ejercicio 4A (2.5 *puntos*)

Determinada enfermedad es curable si se trata antes de que aparezcan sus síntomas. Para poder tratar a los pacientes a tiempo, se pasa un test a la mayor parte de la población. El 1.5 % *de la población sufre esta enfermedad. La probabilidad de que, no sufriendo la enfermedad, el test de positivo es* 0.021 *y la de que si estás enfermo de negativo también es* 0.021*.*

a) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de no sufrir la enfermedad?

b) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que el test de positivo si la persona está enferma?

c) (1.25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona esté enferma si el test ha dado positivo?

(Cantabria - Matemáticas II - Modelo 2025 - Opción A)

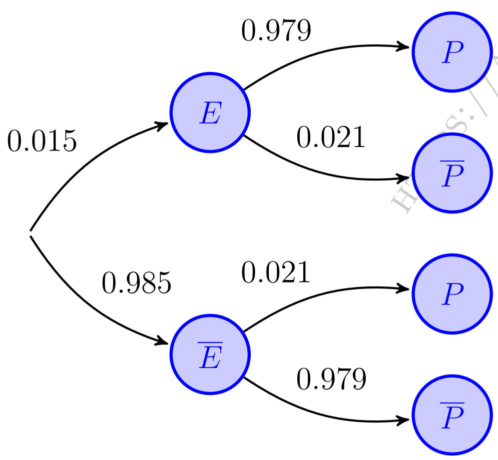
Solución.

Sean los sucesos:

$$E \equiv \text{“El paciente sufre la enfermedad”}$$
$$P \equiv \text{“El test da positivo en la enfermedad”}$$

Del enunciado tenemos:

$$P(E) = 0.015 \qquad \& \qquad P(P \mid \overline{E}) = 0.021 \qquad \& \qquad P(\overline{P} \mid E) = 0.021$$



a) $P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - 0.015 = 0.985$

b) $P(P \mid E) = 1 - P(\overline{P} \mid E) = 1 - 0.021 = 0.979$

c) $$\begin{aligned} P(P) &= P\big((E \cap P) \cup (\overline{E} \cap P)\big) \\ &= P(E \cap P) + P(\overline{E} \cap P) \\ &= P(E) \cdot P(P \mid E) + P(\overline{E}) \cdot P(P \mid \overline{E}) \\ &= 0.015 \cdot 0.979 + 0.985 \cdot 0.021 = 0.0354 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(E \mid P) &= \frac{P(E \cap P)}{P(P)} = \frac{P(E) \cdot P(P \mid E)}{P(P)} \\ &= \frac{0.015 \cdot 0.979}{0.0354} = 0.4147 \end{aligned}$$

Ejercicio 4B (2.5 *puntos*)

Sean A y B dos sucesos asociados a un experimento aleatorio tales que

$$P(A) = 0.8 \qquad \& \qquad P(B) = 0.5 \qquad \& \qquad P(A \cup B) = 1$$

a) *(0.5 puntos) Calcule la $P(A \cap B)$.*

b) *(0.75 puntos) Razone si A y B son independientes.*

c) *(0.5 puntos) Calcule la $P(\overline{B})$, con $\overline{B}$ el suceso contrario a B.*

d) *(0.75 puntos) Calcule la $P(\overline{A} \cap \overline{B})$, con $\overline{A}$ el suceso contrario a A.*

(Cantabria - Matemáticas II - Modelo 2025 - Opción B)

Solución.

a) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.8 + 0.5 - 1 \implies \boxed{P(A \cap B) = 0.3}$

b) $P(A) \cdot P(B) = 0.8 \cdot 0.5 = 0.4 \neq P(A \cap B) = 0.3 \implies$ A y B no son independientes

c) $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.5 \implies \boxed{P(\overline{B}) = 0.5}$

d) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 1 \implies \boxed{P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0}$