MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JULIO 2024

- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2024 (Extraordinario)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 3 \end{pmatrix}$$

en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Razone cuál es el rango de A.

(Cantabria - Matemáticas II - Julio 2024

Solución.

$$|A_{41}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) \geq 3$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 3 \end{vmatrix} = \left[\ C_2 = C_2 + 2C_3\ \right] = \begin{vmatrix} a & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1+2a & a & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1+2a & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\ F_2 = 3F_2 - 2F_3\ \right] = \frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} a & 3 & 0 \\ 1 & -5-4a & 0 \\ 1 & 1+2a & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3} \cdot \begin{vmatrix} a & 3 \\ 1 & -5-4a \end{vmatrix}$$

$$= -4a^2 - 5a - 3 \neq 0\ \forall a \in \mathbb{R} \implies \operatorname{ran}(A) = 4\ \forall a \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Considere la función $f(x) = \begin{cases} x^3 - 10x^2 + 25x & , \text{ si } x \leq 5 \\ \ln\left(x^2 - 25\right) & , \text{ si } x > 5 \end{cases}$

I) *(1.25 puntos) Determine si $f(x)$ tiene asíntota(s). En caso afirmativo, calcúlela(s).*

II) *(1.25 puntos) Determine si $f(x)$ tiene punto(s) de inflexión. En caso afirmativo, calcúlelo(s).*

(Cantabria - Matemáticas II - Julio 2024

Solución.

I) $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R}$

- `A. Vertical:` $\exists A.V.$ en $x = 5^+$
  - $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 5} \ln\left(x^2 - 25\right) = -\infty$
- `A. Horizontal:` $\nexists A.H.$
  - $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^3 - 10x^2 + 25x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-x^3 - 10x^2 - 25x\right) = -\infty$

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(x^2 - 25\right) = +\infty$

- `A. Oblicua:` $\nexists A.O.$
  - Si $x < 5$ $\nexists A.O.$ pues $f_1(x) = x^3 - 10x^2 + 25x$ es un polinomio.
  - Si $x > 5$ $\nexists A.O.$ pues

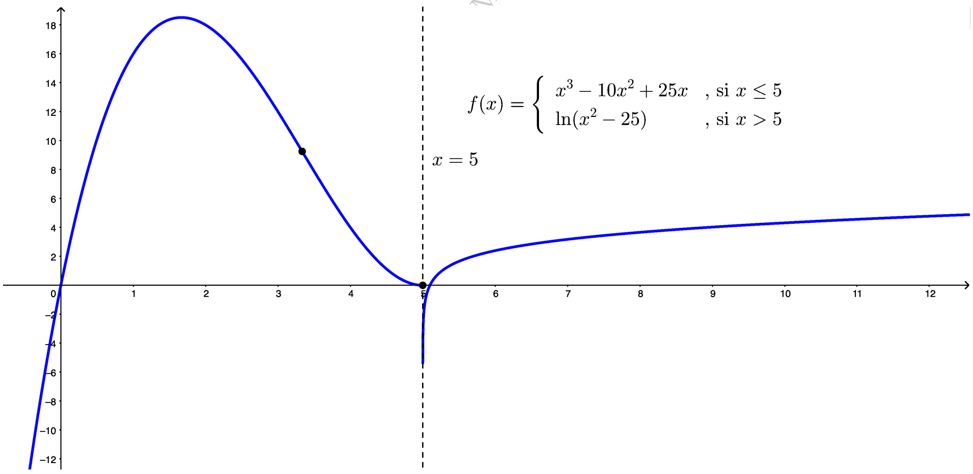
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2 - 25)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x^2 - 25} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 0$$

II) `Puntos de Inflexión:`

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 20x + 25 & , x < 5 \\ \dfrac{2x}{x^2 - 25} & , x > 5 \end{cases} \Longrightarrow f''(x) = \begin{cases} 6x - 20 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{10}{3} & , x < 5 \\ -\dfrac{2x^2 + 50}{(x^2 - 25)^2} < 0 & , x > 5 \end{cases}$$

	$(-\infty, {}^{10}/_3)$	$({}^{10}/_3, 5)$	$(5, +\infty)$
Signo $f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	Cóncava $\cap$	Convexa $\cup$	Cóncava $\cap$

Por lo tanto la función $f(x)$ tiene un único punto de inflexión en $x = {}^{10}/_3$.



Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Sean $A(0,0,0)$, $B(0,0,1)$, $C(a,4,1)$ y $D(a,4,0)$ los vértices consecutivos de un rectángulo en función de una constante $a \geq 0$.

I) *(1.25 puntos) Calcule la constante de forma que el área del rectángulo sea 5 u^2.*

II) *(1.25 puntos) Calcule las ecuaciones paramétricas de las rectas de los lados del rectángulo para $a = 3$.*

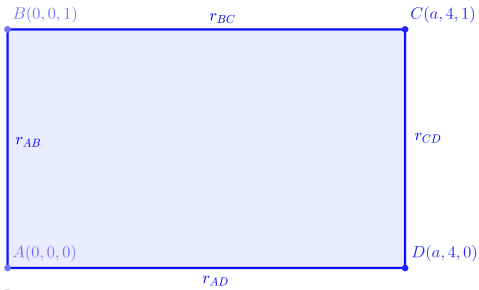
(Cantabria - Matemáticas II - Julio 2024

Solución.

I) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = |(0,0,1)| = 1$

$\left|\overrightarrow{AD}\right| = |(a,4,0)| = \sqrt{16+a^2}$

$S_{\square} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{16+a^2} = 5 \Rightarrow \boxed{a = 3}$



II) Para $a = 3$ tenemos: $A(0,0,0)$ & $B(0,0,1)$
$C(3,4,1)$ & $D(3,4,0)$

$$r_{AB} \equiv \begin{cases} A(0,0,0) \\ \overrightarrow{AB} = (0,0,1) \end{cases} \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \& \quad r_{AD} \equiv \begin{cases} A(0,0,0) \\ \overrightarrow{AD} = (3,4,0) \end{cases} \equiv \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

$$r_{BC} \equiv \begin{cases} B(0,0,1) \\ \overrightarrow{AD} = (3,4,0) \end{cases} \equiv \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad \& \quad r_{CD} \equiv \begin{cases} D(3,4,0) \\ \overrightarrow{AB} = (0,0,1) \end{cases} \equiv \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = \lambda \end{cases}$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

> *Se ha desarrollado un test para detectar un tipo particular de artritis en personas de alrededor de 50 años. Calcule la probabilidad de que una persona esté enferma si al hacerle el test este sale positivo. Conocemos por un estudio previo que:*
>
> - *La probabilidad de que las personas sobre 50 años tengan este tipo de artritis es de 0.10.*
> - *La probabilidad de que el test salga positivo a personas sobre 50 años con la arritis estudiada es de 0.85.*
> - *La probabilidad de que el test salga positivo a personas sobre 50 años sin la artritis estudiada es de 0.04.*
>
> *(Cantabria - Matemáticas II - Julio 2024*

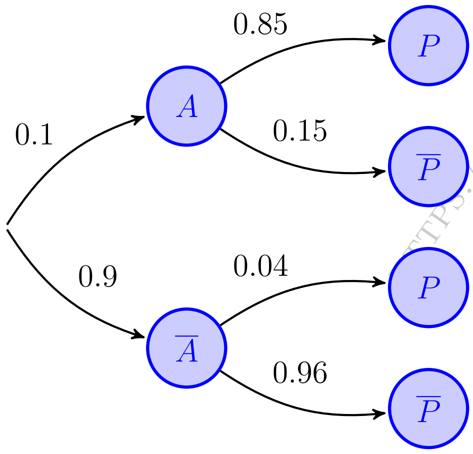
Solución.

Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{“La persona tiene artritis”}$$
$$P \equiv \text{“El test da positivo en artritis”}$$

Del enunciado tenemos:

$$P(A) = 0.1 \qquad \& \qquad P(P \mid A) = 0.85 \qquad \& \qquad P(P \mid \overline{A}) = 0.04$$



- $P(P) = P\big((A \cap P) \cup (\overline{A} \cap P)\big)$
  $= P(A \cap P) + P(\overline{A} \cap P)$
  $= P(A) \cdot P(P \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(P \mid \overline{A})$
  $= 0.1 \cdot 0.85 + 0.9 \cdot 0.04 = 0.121$
- $P(A \mid P) = \dfrac{P(A \cap P)}{P(P)} = \dfrac{P(A) \cdot P(P \mid A)}{P(P)}$
  $= \dfrac{0.1 \cdot 0.85}{0.121} = 0.7024$

Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)

Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = -1 \\ -2x + 4z = -6 \\ x - 2y + \lambda z = 0 \end{cases}$$

en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$.

I) *(0.75 puntos) Razone si el sistema puede ser incompatible. En caso afirmativo, determine cuándo lo es.*

II) *(0.75 puntos) Razone si el sistema puede ser compatible determinado. En caso afirmativo, determine cuándo lo es.*

III) *(0.75 puntos) Razone si el sistema puede ser compatible indeterminado. En caso afirmativo determine cuándo lo es.*

IV) *(0.25 puntos) Razone si el sistema tienee solución única para $\lambda = 1$. En caso afirmativo, calcule dicha solución.*

(Cantabria - Matemáticas II - Julio 2024

Solución.

Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & \lambda & 0 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes

$$|A| = 4 - 6\lambda = 0 \implies \lambda = 2/3$$

I) Si $\lambda \neq 2/3$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

II) Si $\lambda = 2/3 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 2/3 & 0 \end{array}\right)$

$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & -6 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

$\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA INCOMPATIBLE ($\nexists$ solución), por lo tanto no es posible que el sistema sea Compatible Indeterminado.

III) En la discusión anterior se ve que el sistema no puede ser Compatible Indeterminado.

IV) Para $\lambda = 1 \neq {}^2\!/\!_3$ es sistema es S.C.D. Resolvemos por el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 8 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 6F_3 + F_2 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x + 0 - 2 = -1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -6y - 8 = -8 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2\lambda = -2 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{array}}$$

———————— ○ ————————

Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)

Considere la función $f(x) = ax + \operatorname{sen} x$, en función de las constante real a, con $x \in [0, 2\pi]$.

I) (0.5 puntos) Determine la constante para que la función valga 0 cuando $x = {}^\pi\!/\!_2$.

II) (1 punto) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ para el valor de a calculado.

III) (1 punto) Calcule una primitiva de $f(x)$.

(Cantabria - Matemáticas II - Julio 2024

Solución.

a) $f({}^\pi\!/\!_2) = 0 \implies a \cdot \dfrac{\pi}{2} + \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{a\pi}{2} + 1 = 0 \implies \boxed{a = -\dfrac{2}{\pi}}$

b) $f(x) = -\dfrac{2x}{\pi} + \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{2}{\pi} + \cos x = 0 \implies \cos x = \dfrac{2}{\pi} \implies \begin{cases} x = 0.881 \\ x = 5.402 \end{cases}$

	$(0, 0.881)$	$(0.881, 5.402)$	$(5.402, 2\pi)$
Signo $f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(0, 0.881) \cup (5.402, 2\pi)$ y *decreciente* en $(0.881, 5.402)$, y tiene un *mínimo relativo* en $x = 5.402$ y un *máximo relativo* en $x = 0.881$.

c) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \int (ax + \operatorname{sen} x)\,dx = \frac{ax^2}{2} - \cos x + C$

———————— ○ ————————

Ejercicio 7 (2.5 *puntos*)

Sean $A(0,3,2)$, $B(4,1,3)$, $C(2,3,4)$ y $D(0,1,2)$ los vértices de un tetraedro.

a) (1.25 puntos) Obtenga la ecuación vectorial del plano determinado por los puntos A, B y C.

b) (1.25 puntos) Calcule el volumen del tetraedro.

(Cantabria - Matemáticas II - Julio 2024

Solución.

a) $\pi \equiv \begin{cases} A(0,3,2) \\ \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (4,-2,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (2,0,2) \approx (1,0,1) \end{cases}$

$$\pi \equiv (x,y,z) = (0,3,2) + \lambda \cdot (4,-2,1) + \mu \cdot (1,0,1) \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$$

b) $\overrightarrow{AB} = (4,-2,1) \qquad \& \qquad \overrightarrow{AC} = (2,0,2) \qquad \& \qquad \overrightarrow{AD} = (0,-2,0)$

$$V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6} \cdot \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] \right| = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot 12 = 2\ u^3$$

Ejercicio 8 (2.5 *puntos*)

Las alturas de hombres de 17 años sigue una distribución normal de media 175 centímetros y desviación estándar 7.41 centímetros. Sea A el suceso formado por los hombres de 17 años que miden más de 170 centímetros y B el suceso de las personas de 17 años que realizan la EBAU en una región determinada. Tenemos que $P(B^c) = 0.35$, donde B^c denota el suceso contrario de B.

I) *(1 punto) Calcule $P(A)$.*

II) *(0.5 puntos) Calcule $P(B)$.*

III) *(0.5 puntos) Calcule $P(A \cap B^c)$.*

IV) *(0.5 puntos) Calcule $P(A \cup B)$.*

(Cantabria - Matemáticas II - Julio 2024

Solución.

$$X \equiv \text{“Altura de los hombres de 17 años (cm)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(175, 7.41)$$

I) $P(A) = P(X \geq 170) = P\left(Z \geq \dfrac{170 - 175}{7.41}\right) = P(Z \geq -0.67) = P(Z \leq 0.67)$
$= 0.7486$

II) $P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - 0.35 = 0.65$

III) $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) \underset{indep.}{\overset{A\ y\ B}{=}} P(A) - P(A) \cdot P(B) = 0.7486 - 0.7486 \cdot 0.65$
$= 0.262$

IV) $P(A \cup B) = P(A \cap B^c) + P(B) = 0.262 + 0.65 = 0.912$