MATEMATICAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU MODELO 2025

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Modleo 2025

Ejercicio 1A (3 *puntos*)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ & $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Se pide hallar la matriz X que satiface la ecuación $X^{-1} \cdot A + A = B$.

b) Se pide hallar la matriz Y que satisface la ecuación $A \cdot Y \cdot A^{-1} = I$.

(Cantabria - Matemáticas CCSS - Modelo 2025 - Opción A)

Solución.

a) $X^{-1} \cdot A + A = B \implies X^{-1} \cdot A = B - A \implies X^{-1} \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} = (B - A) \cdot A^{-1}$

$$\implies X^{-1} = (B - A) \cdot A^{-1} \implies X = \left[(B - A) \cdot A^{-1}\right]^{-1} \implies \boxed{X = A \cdot (B - A)^{-1}}$$

$$B - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad |B - A| = 1$$

$$\text{Adj}\,(B - A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad (B - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = A \cdot (B - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

b) $A \cdot Y \cdot A^{-1} = I \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot Y \cdot \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} = A^{-1} \cdot I \cdot A \implies Y = A^{-1} \cdot A \implies \boxed{Y = I_3}$

Ejercicio 1B (3 *puntos*)

La editorial "EcoReads", comprometida con la sostenibilidad ambiental, plantea lanzar dos colecciones de libros: una de guías prácticas sobre sostenibilidad y una colección de libros de cocina vegetariana. Cada guía práctica genera un beneficio de 5 € y cada libro de cocina vegetariana, aporta un beneficio de 4 €. Para la producción de estos libros, la editorial emplea dos tipos de papel ecológico: papel reciclado de alta calidad y papel de fibras de bambú. La impresión de una guía requiere 60 g de papel reciclado y 20 g de papel de bambú, mientras que cada libro de cocina vegetariana necesita 70 g de papel reciclado y 10 g de papel de bambú. La editorial tiene a su disposición. 4000 g de papel reciclado y 800 g de papel de bambú para su próxima producción. Además, para garantizar una diversificación del catálogo, la editorial decide que se deben publicar al menos 10 libros de cocina vegetariana.

a) Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

b) Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

c) ¿Cuántos ejemplares de cada colección debería publicar la editorial para maximizar sus beneficios?

d) ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

(Cantabria - Matemáticas CCSS - Modelo 2025 - Opción N)

Solución.

	Guías	Libros de cocina	Restricción
Papel reciclado (g/ud.)	60	70	≤ 4000
Papel bambú (g/ud.)	20	10	≤ 800
Beneficio (€)	5	4	

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de guías a publicar"
  $y \equiv$ "Nº de libros de cocina a publicar"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} (1)\; 60x + 70y \leq 4000 \\ (2)\; 20x + 10y \leq 800 \\ (3)\; y \geq 10 \\ x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (1)\; 6x + 7y \leq 400 & \rightarrow (0,57) \quad \& \quad (66.7,0) \\ (2)\; 2x + y \leq 80 & \rightarrow (0,80) \quad \& \quad (40,0) \\ (3)\; y \geq 10 & \rightarrow (0,10) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

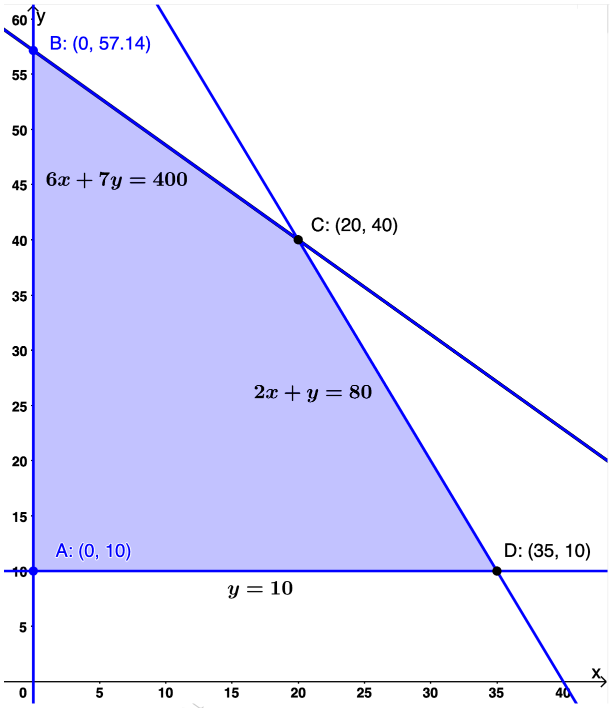
- `Función objetivo`

$$f(x,y) = 5x + 4y \quad \text{(euros)}$$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.
- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	10	40
B	0	57.14	228.56
C	20	40	260
D	35	10	215

El *máximo beneficio* es de 260 €, publicando 20 guías de sostenibilidad ambiental y 40 libros de cocina.



Ejercicio 2 (4 *puntos*)

Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 4 & , \text{ si } x \leq -1 \\ x^3 - x + 3 & , \text{ si } -1 < x \leq 2 \\ \dfrac{x + 3b - 2}{x - 1} & , \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

a) *Determine los valores de los parámetros a y b para los cuales la función es continua en todo su dominio.*

b) *Utilizando los valores de los parámetros a y b del apartado anterior, analice si la función $f(x)$ es creciente o decreciente en el intervalo $(2, +\infty)$.*

c) *Calcule la integral definida $I = \int_0^2 f(x)\, dx$*

(Cantabria - Matemáticas CCSS - Modelo 2025

Solución.

a) `Continuidad de` $f(x)$:

- Si $x \neq \{-1, 2\}$ la función $f(x)$ es continua pues las ramas son polinomios o funciones racionales cuyo denominador no se anula en su rama.
- Si $x = -1$
  - $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (ax^2 - 4) = a - 4$
  - $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^3 - x + 3) = 3$
  - $f(-1) = a - 4$

  $f(x)$ es continua en $x = -1 \iff \lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1) \xRightarrow{a-4=3} \boxed{a = 7}$
- Si $x = 2$
  - $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^3 - x + 3) = 9$
  - $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} = \dfrac{x + 3b - 2}{x - 1} = 3b$
  - $f(2) = 9$

  $f(x)$ es continua en $x = 2 \iff \lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) \xRightarrow{3b=9} \boxed{b = 3}$

b) En el intervalo $(2, +\infty)$, para $a = 7$ y $b = 3$, la función $f(x) = \dfrac{x + 7}{x - 1}$.

$$f'(x) = \frac{x - 1 - (x + 7)}{(x - 1)^2} = -\frac{8}{(x - 1)^2} < 0 \implies f(x) \text{ es decreciente en } (2, +\infty)$$

c) $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)\, dx = \int_0^2 (x^3 - x + 3)\, dx = \left. \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 3x \right]_0^2 = (4 - 2 + 6) - 0 = 8$

Ejercicio 3A (3 *puntos*)

Un profesor ha determinado que el tiempo que sus estudiantes tardan en completar un examen, sigue una distribución normal con una desviación típica de 10 minutos. A partir de una muestra de 100 estudiantes seleccionados al azar, se calcula que el tiempo medio necesario para completar un examen es de 90 minutos.

a) Calcule el intervalo de confianza del 93 % para el tiempo medio que los estudiantes tardan en completar un examen.

b) ¿Cuál es el número mínimo de estudiantes que habrá que considerar para que el error al estimar el tiempo medio empleado en completar un examen, con un nivel de confianza del 97 %, sea de 2 minutos?

(Cantabria - Matemáticas CCSS - Modelo 2025 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Tiempo en completar el examen (minutos)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 10)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 10) \xrightarrow{n=100} \overline{x} = 90 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.93$

$$1-\alpha = 0.93 \implies \alpha = 0.07 \implies \alpha/2 = 0.035 \implies 1-\alpha/2 = 0.965 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.81$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.81 \cdot \frac{10}{\sqrt{10}} = 1.81$$

$$I.C._{93\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{93\,\%}(\mu) = (88.19; 91.81)}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 2 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.97$

$$1-\alpha = 0.97 \implies \alpha = 0.03 \implies \alpha/2 = 0.015 \implies 1-\alpha/2 = 0.985 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.17$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} < 2 \implies n > \left(2.17 \cdot \frac{10}{2}\right)^2 = 117.72 \implies \boxed{n = 118}$$

Ejercicio 3B (3 *puntos*)

En un instituto se sabe que el 45 % de los estudiantes practican algún deporte, el 30 % participan en actividades artísticas y el 25 % están involucrados en actividades de voluntariado. Además se sabe que el 60 % de los estudiantes que practican deportes, el 40 % de los que participan en actividades artísticas y el 20 % de los que están involucrados en actividades de voluntariado también son miembros del Consejo estudiantil. Si se escoge al azar un estudiante:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que practique deporte y sea miembro del Consejo estudiantil?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante participe en actividades artísticas y no sea miembro del Consejo estudiantil?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante sea miembro del Consejo estudiantil?

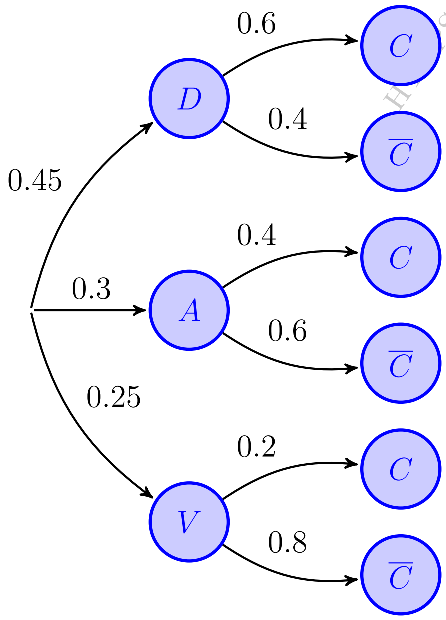
d) Si un estudiante no es miembro del Consejo estudiantil, ¿cuál es la probabilidad de que participe en actividades de voluntariado?

(Cantabria - Matemáticas CCSS - Modelo 2025 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$D \equiv$ "El estudiante practica deporte"
$A \equiv$ "El estudiante participa en actividades artísticas"
$V \equiv$ "El estudiante participa en actividades de voluntariado"
$C \equiv$ "El estudiante es miembro del Consejo estudiantil"



a) $P(D \cap C) = P(D) \cdot P(C \mid D) = 0.45 \cdot 0.6 = 0.27$

b) $P(A \cap \overline{C}) = P(A) \cdot P(\overline{C} \mid A) = 0.3 \cdot 0.6 = 0.18$

c) $$\begin{aligned} P(C) &= P\big((D \cap C) \cup (A \cap C) \cup (V \cap C)\big) \\ &= P(D \cap C) + P(A \cap C) + P(V \cap C) \\ &= P(D) \cdot P(C \mid D) + P(A) \cdot P(C \mid A) \\ &+ P(V) \cdot P(C \mid V) = 0.45 \cdot 0.6 \\ &+ 0.3 \cdot 0.4 + 0.25 \cdot 0.2 = 0.44 \end{aligned}$$

d) $$P(V \mid \overline{C}) = \frac{P(V \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \frac{P(V) \cdot P(\overline{C} \mid V)}{1 - P(C)} = \frac{0.25 \cdot 0.8}{1 - 0.44} = 0.3572$$