MATEMATICAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2024
- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2024 (Ordinario)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Una empresa de jardinería necesita adquirir 300 kg de tierra, 200 kg de piedras decorativas y 100 kg de semillas para completar un proyecto de diseño de jardines. Al comparar precios entre dos proveedores, A y B, obtiene las siguientes ofertas: el proveedor A le ofrece un precio total de 13000 €. El proveedor B, que está ofreciendo descuentos por renovación de inventario, reduce el precio de la tierra a $1/3$ del ofrecido por el proveedor A, el de las piedras decorativas a la mitad, y el de las semillas a $1/5$, resultando en un ahorro de 8800 € respecto al precio total ofrecido por el proveedor A. Además, se sabe que para el proveedor A, el precio por kg de semillas es dos veces la suma de los precios por kg de tierra y piedras decorativas.

a) (0.9 puntos) Plantee el sistema de ecuaciones que permita calcular el precio por kilogramo de la tierra, las piedras decorativas y las semillas en el proveedor A.

b) (0.8 puntos) Analice la compatibilidad de dicho sistema.

c) (0.8 puntos) Resuélvalo.

(Cantabria - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

Sean las incógnitas:

$x \equiv$ "Precio de la tierra en el proveedor A (€/kg)"
$y \equiv$ "Precio de las piedras decorativas en el proveedor A (€/kg)"
$z \equiv$ "Precio de las semillas en el proveedor A (€/kg)"

a) Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} 300x + 200y + 100z = 13000 \\ \dfrac{300x}{3} + \dfrac{200y}{2} + \dfrac{100z}{5} = 13000 - 8800 \\ z = 2 \cdot (x+y) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x + 2y + z = 130 \\ 5x + 5y + z = 210 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \Longrightarrow$ Sist. Compatible Determinado (Solución única)

c) Resolvemos por el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 130 \\ 5 & 5 & 1 & 210 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ 3F_2 - 5F_1 \\ 3F_3 - 2F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 130 \\ 0 & 5 & -2 & -20 \\ 0 & 2 & -5 & -260 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ 5F_3 - 2F_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 130 \\ 0 & 5 & -2 & -20 \\ 0 & 0 & -21 & -1260 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow 3x + 2 \cdot 20 + 60 = 130 \\ \Rightarrow 5y - 2 \cdot 60 = -20 \\ \Rightarrow -21z = -1260 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 10 \\ y = 20 \\ z = 60 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

La editorial "EcoReads", comprometida con la sostenibilidad ambiental, plantea lanzar dos colecciones de libros: una de guías prácticas sobre sostenibilidad y una colección de libros de cocina vegetariana. Cada guía práctica genera un beneficio de 5 € y cada libro de cocina vegetariana, aporta un beneficio de 4 €. Para la producción de estos libros, la editorial emplea dos tipos de papel ecológico: papel reciclado de alta calidad y papel de fibras de bambú. La impresión de una guía requiere 60 g de papel reciclado y 20 g de papel de bambú, mientras que cada libro de cocina vegetariana necesita 70 g de papel reciclado y 10 g de papel de bambú. La editorial tiene a su disposición. 4000 g de papel reciclado y 800 g de papel de bambú para su próxima producción. Además, para garantizar una diversificación del catálogo, la editorial decide que se deben publicar al menos 10 libros de cocina vegetariana.

a) *(0.75 puntos) Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.*

b) *(1 punto) Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.*

c) *(0.5 puntos) ¿Cuántos ejemplares de cada colección debería publicar la editorial para maximizar sus beneficios?*

d) *(0.25 puntos) ¿A cuánto asciende dicho beneficio?*

(Cantabria - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

	Guías	Libros de cocina	Restricción
Papel reciclado (g/ud.)	60	70	≤ 4000
Papel bambú (g/ud.)	20	10	≤ 800
Beneficio (€)	5	4	

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de guías a publicar"
  $y \equiv$ "Nº de libros de cocina a publicar"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} (1)\ 60x + 70y \leq 4000 \\ (2)\ 20x + 10y \leq 800 \\ (3)\ y \geq 10 \\ x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (1)\ 6x + 7y \leq 400 & \rightarrow (0, 57) \quad \& \quad (66.7, 0) \\ (2)\ 2x + y \leq 80 & \rightarrow (0, 80) \quad \& \quad (40, 0) \\ (3)\ y \geq 10 & \rightarrow (0, 10) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo`

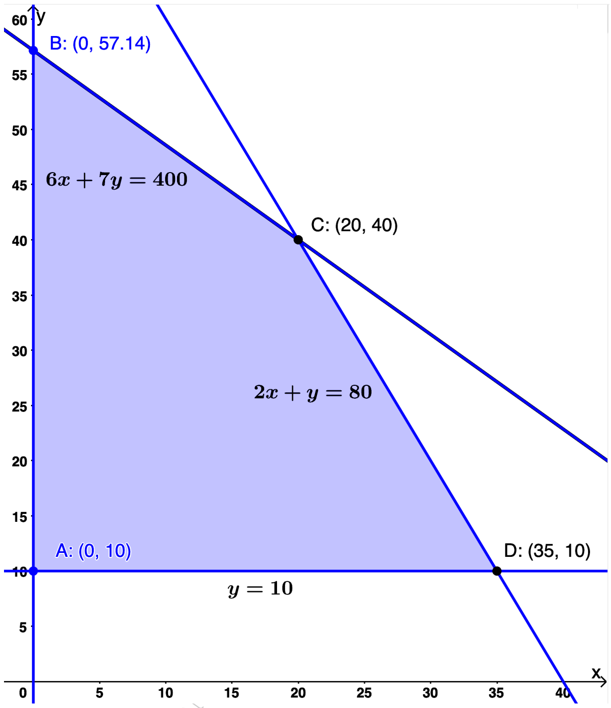
$$f(x, y) = 5x + 4y \quad \text{(euros)}$$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	10	40
B	0	57.14	228.56
C	20	40	260
D	35	10	215

El *máximo beneficio* es de 260 €, publicando 20 guías de sostenibilidad ambiental y 40 libros de cocina.



Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Dada la función $f(x) = \begin{cases} ax+2 & , \text{ si } x \leq -1 \\ x^2-3x+5 & , \text{ si } -1 < x \leq 3 \\ \dfrac{x-b}{x^2+1} & , \text{ si } x > 3 \end{cases}$

a) (1.5 puntos) Determine los valores de los parámetros a y b para los cuales la función es continua en todo su dominio.

b) (1 punto) Calcule la integral definida $I = \int_0^2 f(x)\,dx$

(Cantabria - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

a) `Continuidad de` $f(x)$:

- Si $x \neq \{-1, 3\}$ $f(x)$ es continua pues son polinomios o funciones racionales cuyo denominador no se anula.
- Si $x = -1$
  - $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1}(ax+2) = -a+2$
  - $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1}(x^2-3x+5) = 9$
  - $f(-1) = -a+2$

  $f(x)$ es continua en $x=-1 \iff \lim\limits_{x\to -1} f(x) = f(-1) \xrightarrow{-a+2=9} \boxed{a=-7}$
- Si $x = 3$
  - $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}(x^2-3x+5) = 5$
  - $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-b}{x^2+1} = \dfrac{3-b}{10}$
  - $f(3) = 5$

  $f(x)$ es continua en $x=3 \iff \lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3) \xrightarrow{5=\frac{3-b}{10}} \boxed{b=-47}$

b) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 (x^2-3x+5)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x\right]_0^2 = \left(\frac{8}{3} - 6 + 10\right) - 0 = \frac{20}{3}$

———— ○ ————

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Dada la función $f(x) = \dfrac{2x^2+4x+2}{x-2}$

a) *(0.25 puntos) Obtenga los puntos de corte con los ejes OX y OY.*

b) *(1 punto) Identifique las asíntotas de la función.*

c) *(1.25 puntos) Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento.*

(Cantabria - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

a)
- `OX:` $y = 0 \Rightarrow \dfrac{2x^2+4x+2}{x-2} = 0 \Rightarrow 2x^2+4x+2 = 0 \implies x = -1 \implies (-1, 0)$
- `OY:` $x = 0 \implies y = \dfrac{2}{-2} = -1 \implies (0, -1)$

b) $x - 2 = 0 \implies x = 2 \implies \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

- `A. Vertical:` $\exists\, A.V.$ en $x = 2$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{2x^2+4x+2}{x-2} = \left[\frac{18}{0}\right] = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 2^-} f(x) = \left[\frac{18}{0^-}\right] = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 2^+} f(x) = \left[\frac{18}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

- `A. Horizontal:` $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+4x+2}{x-2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \pm\infty \implies \underset{x\to\pm\infty}{\nexists\, A.H.}$
- `A. Oblicua:` $\underset{x\to\pm\infty}{\exists\, A.O.}$ en $y = 2x + 8$
  - $m = \displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+4x+2}{x^2-2x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{2}{1} = 2$
  - $n = \displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2x^2+4x+2}{x-2} - 2x\right)$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{2x^2} + 4x + 2 - \cancel{2x^2} + 4x}{x-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{8x+2}{x-2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{8}{1} = 8$$

c) $f'(x) = \dfrac{(4x+4)\cdot(x-2) - (2x^2+4x+2)}{(x-2)^2} = \dfrac{2x^2-8x-10}{(x-2)^2}$

$$= \frac{2\cdot(x+1)\cdot(x-5)}{(x-2)^2} = 0 \implies x = \{-1, 5\}$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,2)$	$(2,5)$	$(5,+\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	-	+
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\inf ty, -1) \cup (5, +\infty)$ y *decreciente* en $(-1, 2,) \cup (2, 5)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(5, 24)$ y un *máximo relativo* en $(-1, 0)$.

Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)

Un profesor ha determinado que el tiempo que sus estudiantes tardan en completar un examen, sigue una distribución normal con una desviación típica de 10 minutos. A partir de una muestra de 100 estudiantes seleccionados al azar, se calcula que el tiempo medio necesario para completar un examen es de 90 minutos.

a) (1.25 puntos) Calcule el intervalo de confianza del 93 % para el tiempo medio que los estudiantes tardan en completar un examen.

b) (1.25 puntos) ¿Cuál es el número mínimo de estudiantes que habrá que considerar para que el error al estimar el tiempo medio empleado en completar un examen, con un nivel de confianza del 97 %, sea de 2 minutos?

(Cantabria - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

$$X \equiv \text{“Tiempo en completar el examen (minutos)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 10)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 10) \xrightarrow{n=100} \overline{x} = 90 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.93$

$$1-\alpha = 0.93 \implies \alpha = 0.07 \implies \alpha/2 = 0.035 \implies 1-\alpha/2 = 0.965 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.81$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.81 \cdot \frac{10}{\sqrt{10}} = 1.81$$

$$I.C._{93\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{93\,\%}(\mu) = (88.19; 91.81)}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 2 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.97$

$$1-\alpha = 0.97 \implies \alpha = 0.03 \implies \alpha/2 = 0.015 \implies 1-\alpha/2 = 0.985 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.17$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} < 2 \implies n > \left(2.17 \cdot \frac{10}{2}\right)^2 = 117.72 \implies \boxed{n = 118}$$

Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)

En un instituto se sabe que el 45 % de los estudiantes practican algún deporte, el 30 % participan en actividades artísticas y el 25 % están involucrados en actividades de voluntariado. Además se sabe que el 60 % de los estudiantes que practican deportes, el 40 % de los que participan en actividades artísticas y el 20 % de los que están involucrados en actividades de voluntariado también son miembros del Consejo estudiantil. Si se escoge al azar un estudiante:

a) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que practique deporte y sea miembro del Consejo estudiantil?

b) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante participe en actividades artísticas y no sea miembro del Consejo estudiantil?

c) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante sea miembro del Consejo estudiantil?

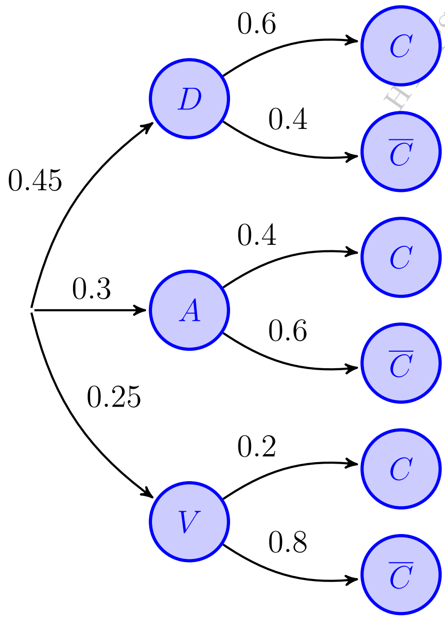
d) (0.75 puntos) Si un estudiante no es miembro del Consejo estudiantil, ¿cuál es la probabilidad de que participe en actividades de voluntariado?

(Cantabria - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

Sean los sucesos:

$D \equiv$ "El estudiante practica deporte"
$A \equiv$ "El estudiante participa en actividades artísticas"
$V \equiv$ "El estudiante participa en actividades de voluntariado"
$C \equiv$ "El estudiante es miembro del Consejo estudiantil"



a) $P(D \cap C) = P(D) \cdot P(C \mid D) = 0.45 \cdot 0.6 = 0.27$

b) $P(A \cap \overline{C}) = P(A) \cdot P(\overline{C} \mid A) = 0.3 \cdot 0.6 = 0.18$

c) $$\begin{aligned} P(C) &= P\big((D \cap C) \cup (A \cap C) \cup (V \cap C)\big) \\ &= P(D \cap C) + P(A \cap C) + P(V \cap C) \\ &= P(D) \cdot P(C \mid D) + P(A) \cdot P(C \mid A) \\ &+ P(V) \cdot P(C \mid V) = 0.45 \cdot 0.6 \\ &+ 0.3 \cdot 0.4 + 0.25 \cdot 0.2 = 0.44 \end{aligned}$$

d) $$P(V \mid \overline{C}) = \frac{P(V \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \frac{P(V) \cdot P(\overline{C} \mid V)}{1 - P(C)} = \frac{0.25 \cdot 0.8}{1 - 0.44} = 0.3572$$