MATEMATICAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JULIO 2024
- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2024 (Extraordinario)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Una organización encargada de un evento deportivo tiene un presupuesto de 500 euros para adquirir material promocional. El material incluye banderas, camisetas y gorras. Los precios de cada artículo por unidad son 5, 6 y 2 euros, respectivamente. La cantidad de camisetas debe ser la mitad de la cantidad de gorras, y la suma de banderas y camisetas debe ser 70.

a) (0.9 puntos) Plantee el sistema de ecuaciones que permite calcular las unidades que deben comprarse de cada artículo si se pretende agotar el presupuesto disponible.

b) (0.8 puntos) Analice la compatibilidad de dicho sistema.

c) (0.8 puntos) Resuélvalo.

(Cantabria - Matemáticas CCSS - Julio 2024

Solución.

Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{“N}^{\text{o}}\text{ de banderas compradas”}$$
$$y \equiv \text{“N}^{\text{o}}\text{ de camisetas compradas”}$$
$$z \equiv \text{“N}^{\text{o}}\text{ de gorras compradas”}$$

a) Del enunciado tenemos

$$\begin{cases} 5x+6y+2z=500 \\ y=\dfrac{z}{2} \\ x+y=70 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y=70 \\ 2y-z=0 \\ 5x+6y+2z=500 \end{cases}$$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado (solución única)

c) Resolvemos el sistema por el método de Gauss

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 70 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 500 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3-5F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 70 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 150 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 2F_3-F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 70 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 300 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x+30=70 \\ \Rightarrow 2y-60=0 \\ \Rightarrow 3z=300 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=40 \\ y=30 \\ z=60 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Una empresa de catering ofrece dos tipos de menús: Estándar (A) y Gourmet (B). Preparar un menú A lleva 2 horas y deja un beneficio de 50 euros; un menú B requiere 3 horas y deja un beneficio 70 euros. La empresa quiere preparar al menos. 15 menús, pero no quiere que el número de menús A supere la mitad del número de menús B. Se dispone de un plazo máximo de 96 horas para elaborar todos los menús.

a) *(0.75 puntos) Plantee la función objetivo para maximizar el beneficio y el conjunto de restricciones que describen el problema.*

b) *(1 punto) Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices*

c) *(0.5 puntos) ¿Cuántos menús de cada tipo debe preparar la empresa para maximizar sus beneficios?*

d) *(0.25 puntos) ¿A cuánto asciende dicho beneficio?*

(Cantabria - Matemáticas CCSS - Julio 2024

Solución.

	Menú Estándar	Menú Gourmet	Restricción
Tiempo de preparación (h)	2	3	≤ 96
Beneficio (€/ud)	50	70	

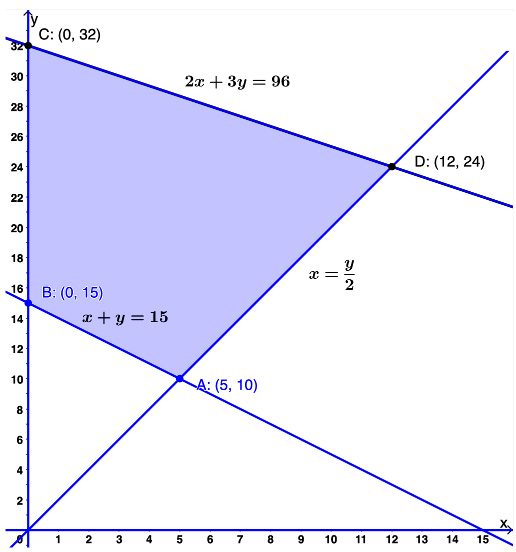
- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de menús Estándar"
  $y \equiv$ "Nº de menús Gomet"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} 1 \; 2x+3y \leq 96 & \to (0,32) \quad \& \quad (48,0) \\ 2 \; x+y \geq 15 & \to (0,15) \quad \& \quad (15,0) \\ 3 \; x \leq \dfrac{y}{2} & \to (0,0) \quad \& \quad (20,40) \\ x, y \geq 0 & \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = 50x + 70y$ (euros)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	5	10	950
B	0	15	1050
C	0	32	2240
D	12	24	2280

El *máximo beneficio* es de 2280 € preparando 12 menús Estándar y 24 Gourmet.

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Dada la función $f(x) = x^3 - 3x + 2$

a) *(0.5 puntos) Obtenga los puntos de corte con los ejes OX y OY.*

b) *(1 punto) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento.*

c) *(1 punto) Dibuje la región delimitada por la curva $y = f(x)$ y la recta $y = x+2$. Calcule el área de esta región.*

(Cantabria - Matemáticas CCSS - Julio 2024

Solución.

a) $y = 0 \implies x^3-3x+2 \overset{\odot}{=} (x-1)\cdot(x^2+1-2) \overset{(*)}{=} (x-1)^2\cdot(x+2) = 0 \implies \begin{cases} (-2,0) \\ (1,0) \end{cases}$

$x = 0 \implies y = 2 \implies (0,2)$

$$\odot \quad \begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \qquad (*) \quad x^2 + x - x = 0 \implies x = \{-2, 1\}$$

b) $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \implies x = \pm 1$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
Signo $f'(x)$	$+$	-	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y *decreciente* en $(-1,1)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(1,0)$ y un *máximo relativo* en $(-1,4)$.

a) Representamos ambas funciones con los datos obtenidos y hallamos su intersección.

$f(x) = g(x) \implies x^3 - 3x + 2 = x + 2$

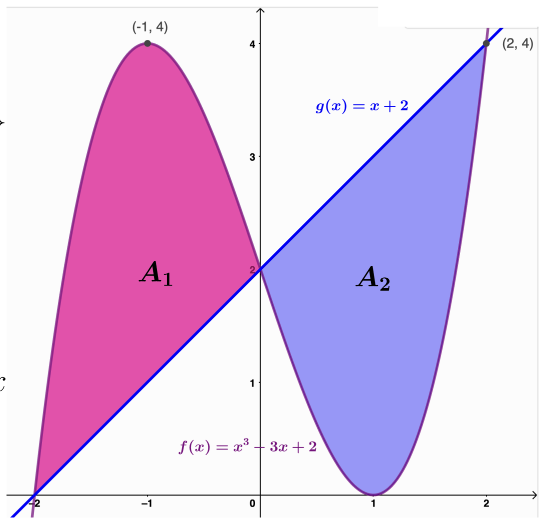
$\Rightarrow x^3 - 4x = x\cdot(x^2-4) = 0 \Rightarrow x = \{-2, 0, 2\}$

$A_1 = \int_{-2}^{0} [f(x) - g(x)]\,dx = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\,dx$

$= \left. \frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_{-2}^{0} = 0 - (4-8) = 4$

$A_2 = \int_{0}^{2} [g(x) - f(x)]\,dx = \int_{0}^{2} (-x^3 + 4x)\,dx$

$= \left. -\frac{x^4}{4} + 2x^2 \right]_{0}^{2} = (-4+8) - 0 = 4$



Área $= |A_1| + |A_2| = 4 + 4 = 8\ u^2$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

> *Dada la función* $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1}$.
>
> *a) (0.75 puntos) ¿En qué punto es discontinua $f(x)$? ¿De qué tipo de discontinuidad se trata en cada caso?*
>
> *b) (1.25 puntos) Identifique las asíntotas de la función.*
>
> *c) (0.5 puntos) Esboce la gráfica de $f(x)$, indicando únicamente los puntos de discontinuidad, las asíntotas y los cortes con los ejes OX y OY.*
>
> *(Cantabria - Matemáticas CCSS - Julio 2024*

Solución.

a) $x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm 1 \implies f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

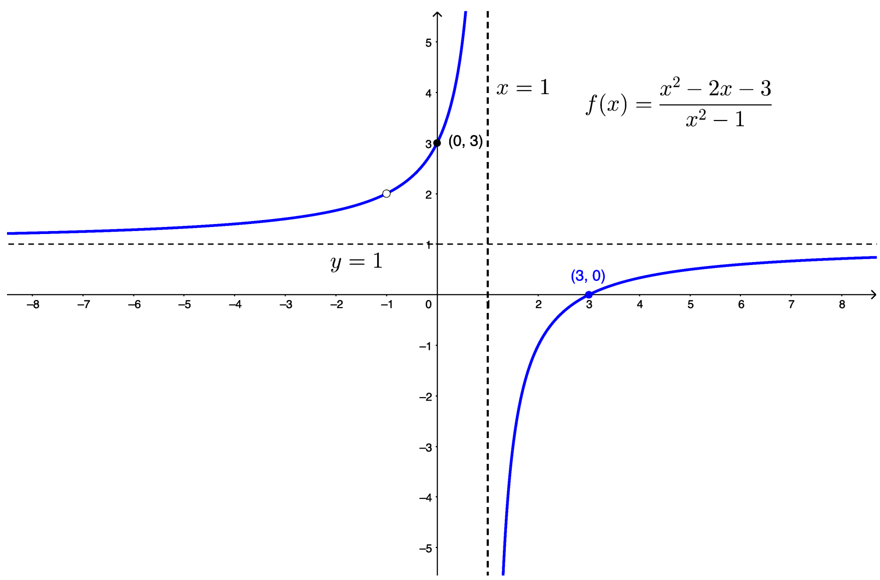
- $\displaystyle \lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to -1} \frac{\cancel{(x+1)} \cdot (x-3)}{\cancel{(x+1)} \cdot (x-1)} = \lim_{x \to -1} \frac{x-3}{x-1}$
  $\displaystyle = \frac{-4}{-2} = 2$
- $\displaystyle \lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = \left[\frac{-4}{0}\right] = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = \left[\frac{-4}{0^-}\right] = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 1^+} f(x) = \left[\frac{-4}{0^+}\right] = -\infty \end{cases}$

  En $x = -1$ hay una discontinuidad evitable, mientras que en $x = 1$ hay una discontinuidad inevitable de salto infinito (una asíntota vertical)

b)
- `A. Vertical:` $\exists A.V.$ en $x = 1$, tal y como vimos en el apartado anterior.
- `A. Horizontal:` $\underset{x \to \pm\infty}{\exists A.H.}$ en $y = 1$

$$y = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{1} = 1$$

c) Esbozamos la función con los datos obtenidos en los apartados anteriores.



Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)

En un estudio sobre bebidas energéticas, se ha determinado que el porcentaje de cafeína por lata, sigue una distribución normal con una desviación típica de 0.45 %*. Se ha tomado una muestra aleatoria de* 120 *latas de distintas marcas, y se ha encontrado que el valor promedio del porcentaje de cafeína por lata es de* 8.75 %*.*

a) (1.25 puntos) Obtenga el intervalo de confianza al 95 % *para el valor promedio del porcentaje de cafeína por lata.*

b) (1.25 puntos) ¿Cuál es el número mínimo de latas que habría que considerar para que el error cometido al estimar el valor medio del porcentaje de cafeína por lata, con un nivel de confianza del 97 %*, fuese de* 0.1 %*?*

(Cantabria - Matemáticas CCSS - Julio 2024

Solución.

$$X \equiv \text{“Contenido de cafeína por lata (\%)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 0.45)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 0.45) \xrightarrow{n=120} \overline{x} = 8.75 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.95$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{0.45}{\sqrt{120}} = 0.081$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (8.669; 8.831)}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 0.1 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.97$

$$1-\alpha = 0.97 \implies \alpha = 0.03 \implies \alpha/2 = 0.015 \implies 1-\alpha/2 = 0.985 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.17$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{0.45}{\sqrt{n}} < 0.1 \implies n > \left(2.17 \cdot \frac{0.45}{0.1}\right)^2 = 95.36 \implies \boxed{n = 96}$$

Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)

En una encuesta sobre hábitos de lectura, se encontró que el 50 % de los lectores, prefieren los libros de ficción, el 30 % prefieren los libros de biografías y el resto prefieren los libros de poesía. Además, se descubrió que el 60 % de los que prefieren la ficción, el 40 % de los que prefieren biografías y el 25 % de los que prefieren poesía también participan en eventos de lectura. Si se escoge al azar una persona:

a) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera los libros de ficción y participe en eventos de lectura?

b) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera los libros de poesía y no participe en eventos de lectura?

c) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que participe en eventos de lectura?

d) (0.75 puntos) Si no participa en eventos de lectura, ¿cuál es la probabilidad de que prefiera los libros de ficción?

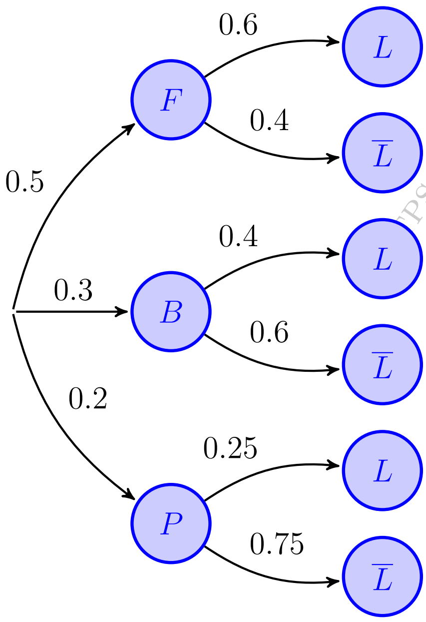
(Cantabria - Matemáticas CCSS - Julio 2024

Solución.

Sean los sucesos:

$F \equiv$ "El lector prefiere la ficción" $\quad B \equiv$ "El lector prefiere las biografías"

$P \equiv$ "El lector prefiere la poesía" $\quad L \equiv$ "El lector participa en eventos de lectura"



a) $P(F \cap L) = P(F) \cdot P(L \mid F) = 0.5 \cdot 0.6 = 0.3$

b) $P(P \cap \overline{L}) = P(P) \cdot P(\overline{L} \mid P) = 0.2 \cdot 0.75 = 0.15$

c)
$$\begin{aligned} P(L) &= P\Big((F \cap L) \cup (B \cap L) \cup (P \cap L)\Big) \\ &= P(F \cap L) + P(B \cap L) + P(P \cap L) \\ &= P(F) \cdot P(L \mid F) + P(B) \cdot P(L \mid B) \\ &+ P(P) \cdot P(L \mid P) = 0.5 \cdot 0.6 \\ &+ 0.3 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.25 = 0.47 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} P(F \mid \overline{L}) &= \frac{P(F \cap \overline{L})}{P(\overline{L})} = \frac{P(F) \cdot P(\overline{L} \mid F)}{1 - P(L)} \\ &= \frac{0.5 \cdot 0.4}{1 - 0.47} = 0.3774 \end{aligned}$$