MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JULIO 2024
- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2024 (Extraordinario)
Bloque Análisis

Ejercicio 1A (2.5 *puntos*)

Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - bx + 9}{x^2 + 3} & , \text{ si } x \le 0 \\ \dfrac{ax}{e^x - 1} + 2 & , \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

a) (1.75 puntos) Estudiar los valores de los parámetros a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 0$.

b) (0.75 puntos) Para los valores $a = 1$ y $b = -2$, hallar la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en $x = -1$.

(Islas Canarias - Matemáticas II - Julio 2024 - Bloque Análisis)

Solución.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - bx + 9}{x^2 + 3} & , \text{ si } x \le 0 \\ \dfrac{ax}{e^x - 1} + 2 & , \text{ si } x > 0 \end{cases} \quad \& \quad f'(x) = \begin{cases} \dfrac{bx^2 - 12x - 3b}{(x^2 + 3)^2} & , \text{ si } x \le 0 \\ \dfrac{ae^x \cdot (1 - x) - a}{(e^x - 1)^2} & , \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

a)
- `Continuidad en` $x = 0$:
  - $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - bx + 9}{x^2 + 3} = \dfrac{9}{3} = 3$
  - $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{ax}{e^x - 1} + 2 \right) = \left[\dfrac{0}{0} \right] \overset{\text{L'Hôp}}{=} 2 + \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a}{e^x} = a + 2$
  - $f(0) = 3$

  $f(x)$ es continua en $x = 0 \iff \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) \implies a + 2 = 3 \implies \boxed{a = 1}$
- `Derivabilidad en` $x = 0$:
  - $f'(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{bx^2 - 12x - 3b}{(x^2 + 3)^2} = -\dfrac{3b}{9} = -\dfrac{b}{3}$
  - $f'(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ae^x \cdot (1 - x) - a}{(e^x - 1)^2} \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-axe^x}{2e^x \cdot (e^x - 1)}$

    $\overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-ae^x \cdot (1 + x)}{2e^x \cdot (2e^x - 1)} = \dfrac{-a}{2}$

  $f(x)$ derivable en $x = 0 \iff f'(0^-) = f'(0^+) \xRightarrow{a=1} -\dfrac{b}{3} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \boxed{b = 3/2}$

b) Para $a = 1$ y $b = -2$ la función $f(x)$ es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x + 9}{x^2 + 3} & , \text{ si } x \le 0 \\ \dfrac{x}{e^x - 1} + 2 & , \text{ si } x > 0 \end{cases} \quad \& \quad f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2x^2 - 12x + 6}{(x^2 + 3)^2} & , \text{ si } x \le 0 \\ \dfrac{e^x \cdot (1 - x) - 1}{(e^x - 1)^2} & , \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

- $x_0 = -1 \implies y_0 = f(x_0) = f(-1) = 2 \implies (x_0, y_0) = (-1, 2)$
- $m_r = f'(x_0) = f'(-1) = 1$
- $r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \implies y - 2 = 1 \cdot (x + 1) \implies \boxed{r \equiv y = x + 3}$

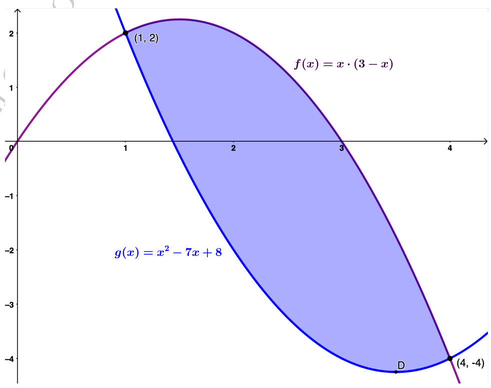
Ejercicio 1B (2.5 *puntos*)

El ayuntamiento ha decidido crear una base metálica para una estatua del reconocido físico canario Blas Cabrera. Dicha base metálica estará delimitada por las parábolas $y = x \cdot (3 - x)$ e $y = x^2 - 7x + 8$, donde la unidad de medida es el metro. Representar un esbozo de la base metálica y calcular el presupuesto de su construcción si el precio del m^2 del material para construir la base metálica es de 65 €.

(Islas Canarias - Matemáticas II - Julio 2024 - Bloque Análisis)

Solución.

- $f(x) = x \cdot (3 - x)$ es una parábola *cóncava* ($\cap$) con vértice en $(^3/_2, ^9/_4)$ y que corta a los ejes en $(0, 0)$ y $(3, 0)$.
- $g(x) = x^2 - 7x + 8$ es una parábola *convexa* ($\cup$) con vértice en $(^7/_2, -^{17}/_4)$.
- El punto de corte de ambas funciones es: $f(x) = g(x) \implies x \cdot (3 - x) = x^2 - 7x + 8$ $\implies 2x^2 - 10x + 8 = 0 \implies x = \{1, 4\}$



$$\text{Área} = \int_1^4 [f(x) - g(x)]\, dx = \int_1^4 \left[x \cdot (3 - x) - (x^2 - 7x + 8)\right] dx$$

$$= \int_1^4 \left(-2x^2 + 10x - 8\right) dx = -\frac{2x^3}{3} + 5x^2 - 8x\bigg]_1^4 = \left(-\frac{128}{3} + 80 - 32\right)$$

$$- \left(-\frac{2}{3} + 5 - 8\right) = 9\ m^2$$

$$\text{Coste} = 65\,\frac{€}{m^2} \cdot 9\,m^2 = 585\ €$$

Bloque Algebra

Ejercicio 2A (2.5 *puntos*)

Tres amigos, Aythami, Besay y Chamaida deciden hacer un fondo común con el dinero que tienen para merendar. La razón (o cociente) entre la suma y la diferencia de las cantidades de dinero que ponen Aythami y Besay es 11/5. La diferencia entre las cantidades aportadas por Aythami y Chamaida es el doble de lo que ha puesto Besay. Además, el doble de la suma de las cantidades que ponen Besay y Chamaida excede en 2 euros a la que aporta Aythami. Hallar la cantidad de dinero que aporta cada uno.

(Islas Canarias - Matemáticas II - Julio 2024 - Bloque Algebra)

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{“Cantidad de dinero que aporta Aythami”} \\ y &\equiv \text{“Cantidad de dinero que aporta Besay”} \\ z &\equiv \text{“Cantidad de dinero que aporta Chamaida”} \end{aligned}$$

Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{11}{5} \\ x - z = 2y \\ 2 \cdot (y+z) = x + 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ x - 2y - 2z = -2 \\ 6x - 16y = 0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones por el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & -2 \\ 6 & -16 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 6F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x - 2 \cdot 3 - 2 = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -z = -2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -4y + 6 \cdot 2 = 0 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 8\,€ \\ y = 3\,€ \\ z = 2\,€ \end{array}}$$

Ejercicio 2B (2.5 *puntos*)

Dada la siguiente matriz $M_k = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k & 0 \\ 2k-3 & 0 & k \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$

a) (1.25 puntos) Estudiar el rango de la matriz M_k*, dependiendo de los valores del parámetro* k*.*

b) (1.25 puntos) Tomamos M_1 *como la matriz anterior para el valor* $k = 1$*, y*

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

hallar la matriz X *que satisface la ecuación:* $X \cdot M_1 + X \cdot M_1^\top = B$

(Islas Canarias - Matemáticas II - Julio 2024 - Bloque Algebra)

Solución.

a) $|M_k| = -k^3 + 3k^2 = k^2 \cdot (-k+3) = 0 \implies k = \{0, 3\}$

- Si $k \neq \{0, 3\} \implies |M_k| \neq 0 \implies \operatorname{ran}(M_k) = 3$
- Si $k = 0 \implies M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \operatorname{ran}(M_0) = 1$
- Si $k = 3 \implies M_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$|M_3| = 0 \implies \operatorname{ran}(M_3) < 3$, y como $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(M_3) = 2$

b) $X \cdot M_1 + X \cdot M_1^\top = B \implies X \cdot \left(M_1 + M_1^\top\right) = B$

$$\Rightarrow X \cdot \underbrace{\left(M_1 + M_1^\top\right) \cdot \cdot \left(M_1 + M_1^\top\right)^{-1}}_{I} = B \cdot \left(M_1 + M_1^\top\right)^{-1} \Rightarrow \boxed{X = B \cdot \left(M_1 + M_1^\top\right)^{-1}}$$

$$M_1 + M_1^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(M_1 + M_1^\top\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$X = B \cdot \left(M_1 + M_1^\top\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

Bloque Geometría

Ejercicio 3A (2.5 *puntos*)

En el espacio tridimensional tenemos las rectas siguientes:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x - 3y + 2z + 2 = 0 \\ 2x + y - 3z = 3 \end{cases} \qquad \& \qquad r_2 \equiv \frac{1-x}{2} = y = \frac{1-z}{2}$$

a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de las rectas anteriores.

b) (1.5 puntos) Hallar la ecuación de la recta s que tiene dirección perpendicular a ambas rectas y que pasa por $P\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$. Calcular el punto de corte de la recta s con la recta r_1.

(Islas Canarias - Matemáticas II - Julio 2024 - Bloque Geometría)

Solución.

$$r_1 \equiv \begin{cases} R_1(1,1,0) \\ \vec{d}_{r_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (7,7,7) \approx (1,1,1) \end{cases} \implies r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} R_2(1,0,1) \\ \vec{d}_{r_2} = (-2,1,-2) \approx (2,-1,2) \end{cases} \implies r_2 \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

a) $\overrightarrow{R_1R_2} = (1,0,1) - (1,1,0) = (0,-1,1)$

$$\left[\vec{d}_{r_1}, \vec{d}_{r_2}, \overrightarrow{R_1R_2}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \implies \text{las rectas } r_1 \text{ y } r_2 \text{ se cruzan}$$

b) $$s \equiv \begin{cases} P\left(0, \frac{1}{2}, 0\right) \\ \vec{d}_s = \vec{d}_{r_1} \times \vec{d}_{r_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (3,0,-3) \approx (1,0,-1) \end{cases} \implies s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = 1/2 \\ z = -\mu \end{cases}$$

$$Q = r_1 \cap s \implies \begin{cases} 1 + \lambda = \mu \\ 1 + \lambda = 1/2 \\ \lambda = -\mu \end{cases} \implies \begin{Bmatrix} \lambda = -1/2 \\ \mu = 1/2 \end{Bmatrix} \implies \boxed{Q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}$$

Ejercicio 3B (2.5 *puntos*)

Responder a las siguientes cuestiones

a) *(0.75 puntos) Justificar si pueden existir vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, que comparten el punto de origen, y cumplen que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$.*

b) *(1.75 puntos) En el espacio tridimensional, dados el plano y la recta secantes siguientes:*

$$\pi \equiv x + 3y + 2z + 3 = 0 \qquad \& \qquad r \equiv \begin{cases} 2x - 3y - z = 4 \\ x + y + 2z = -3 \end{cases}$$

Calcular el punto de corte de la recta y el plano, así como el ángulo que forman.

(Islas Canarias - Matemáticas II - Julio 2024 - Bloque Geometría)

Solución.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha \implies 8 = 2 \cdot 3 \cdot \cos\alpha \implies \cos\alpha = {}^4\!/_3 > 1$

Por lo tanto no pueden existir dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que cumplan las condiciones del enunciado.

b) $$r \equiv \begin{cases} R = (-1, -2, 0) \\ \vec{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-5, -5, 5) \approx (1, 1, -1) \end{cases} \qquad r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$P = r \cap \pi \implies -1 + \lambda + 3 \cdot (-2 + \lambda) - 2\lambda + 3 = 0 \implies \lambda = 2 \implies \boxed{P = (1, 0, -2)}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\left|\vec{d_r} \cdot \vec{n}_\pi\right|}{\left|\vec{d_r}\right| \cdot |\vec{n}_\pi|} = \frac{|(1, 1, -1) \cdot (1, 3, 2)|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{17}} = \frac{|1 + 3 - 2|}{\sqrt{42}} = \frac{\sqrt{42}}{21} \implies \boxed{\alpha = 17.98^\circ}$$

Bloque Probabilidad

Ejercicio 4A (2.5 *puntos*)

Cierta enfermedad puede ser producida por tres tipos de virus A, B, C. En un laboratorio se tienen tres tubos con el virus A, dos con el B y cinco con el C. La probabilidad de que el virus A produzca la enfermedad es $1/3$, que la produzca B es $2/3$ y que la produzca C es $1/7$.

a) *(1.5 puntos) Se elige uno de los tubos anteriores al azar y se inocula el virus contenido en el tubo a un animal, ¿cuál es la probabilidad de que al animal le produzca la enfermedad?*

b) *(1 punto) Si se inocula un virus de los anteriores a un animal y no le produce la enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que se haya inyectado el virus C?*

(Islas Canarias - Matemáticas II - Julio 2024 - Bloque Probabilidad)

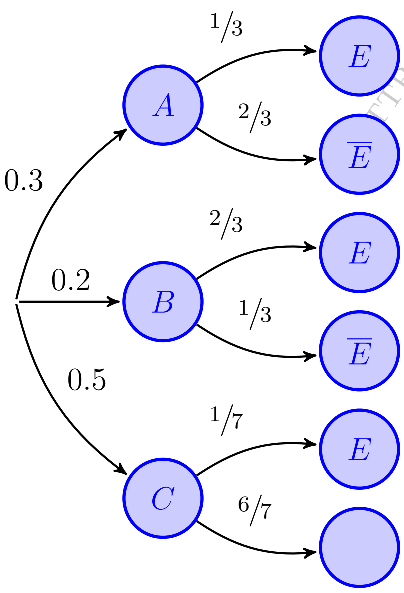
Solución.

$$P(A) = \frac{3}{10} = 0.3 \qquad \& \qquad P(B) = \frac{2}{10} = 0.2 \qquad \& \qquad P(C) = \frac{5}{10} = 0.5$$

Sean los sucesos:

$A \equiv$ "El tubo contiene el virus A" $\quad B \equiv$ "El tubo contiene el virus B"

$C \equiv$ "El tubo contiene el virus C" $\quad E \equiv$ "El virus produce la enfermedad"



a) $P(E) = P\big((A\cap E)\cup(B\cap E)\cup(C\cap E)\big)$
$= P(A\cap E) + P(B\cap E) + P(C\cap E)$
$= P(A)\cdot P(E \mid A) + P(B)\cdot P(E \mid B)$
$+ P(C)\cdot P(E \mid C) = 0.3\cdot\frac{1}{3}$
$+ 0.2\cdot\frac{2}{3} + 0.5\cdot\frac{1}{7} = \frac{32}{105} \simeq 0.3048$

b) $P(C \mid \overline{E}) = \frac{P(C\cap\overline{E})}{P(\overline{E})} = \frac{P(C)\cdot P(\overline{E} \mid C)}{1-P(E)}$
$= \frac{0.5\cdot\frac{6}{7}}{1-\frac{32}{105}} = \frac{45}{73} = 0.6164$

Ejercicio 4B (2.5 *puntos*)

El delantero de un equipo de fútbol suele marcar gol en tres de cada cinco penaltis lanzados. Sabemos que realiza 70 lanzamientos en cada entrenamiento.

a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de marcar entre 40 y 45 penaltis en un entrenamiento.

b) (0.75 puntos) Si la probabilidad de que marque más de la mitad de los penaltis es superior al 90 %, se seleccionará para jugar en una categoría superior. ¿Será seleccionado este delantero? Justificar la respuesta.

c) (0.5 puntos) Si en una temporada lanza 450 penaltis, calcular el número de penaltis que se espera que haya marcado este jugador durante una temporada.

(Islas Canarias - Matemáticas II - Julio 2024 - Bloque Probabilidad)

Solución.

$$X : \text{“Nº de penaltis metidos”} \longrightarrow X : \mathcal{B}(70, {}^3\!/_5) = \mathcal{B}(70, 0.6)$$

a) $X : \mathcal{B}(70, 0.6) \implies \left\{ \begin{array}{l} n = 70 > 20 \checkmark \\ np = 42 > 5 \checkmark \\ nq = 28 > 5 \checkmark \end{array} \right\} \implies Y : \mathcal{N}(np, \sqrt{npq}) = \mathcal{N}(42, 4.1)$

$$\begin{aligned} P(40 \le X \le 45) &= P(39.5 \le Y \le 45.5) = P\left(\frac{39.5 - 42}{4.1} \le Z \le \frac{45.5 - 42}{4.1}\right) \\ &= P(-0.61 \le Z \le 0.85) = P(Z \le 0.85) - P(Z \le -0.61) \\ &= P(Z \le 0.85) - P(Z \ge 0.61) = P(Z \le 0.85) - [1 - P(Z \le 0.61)] \\ &= 0.8023 - (1 - 0.7291) = 0.5314 \end{aligned}$$

b) $P(X > 35) = P(Y \ge 35.5) = P\left(Z \ge \dfrac{35.5 - 42}{4.1}\right) = P(Z \ge -1.59) = P(Z \le 1.59)$

$$= 0.9441 = 94.41\,\% > 90\,\% \implies \text{El jugador será seleccionado}$$

c) $E[X] = np = 450 \cdot 0.6 = 270$ penaltis marcados