MATEMATICAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2024
- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2024 (Ordinario)

Ejercicio 1A (2.5 *puntos*)

Dos agricultores de medianías producen manzanas de tres variedades: reineta, fuji y golden. De las manzanas producidas por el agricultor A, el 70 % son reinetas, el 20 % fuji y el resto golden; de las producidas por el agricultor B, un 50 % son reinetas, un 30 % golden y el resto fuji. Un supermercado de la zona vende manzanas solamente de estos agricultores. El 60 % de las manzanas las adquiere del agricultor A y el 40 % restante del B.

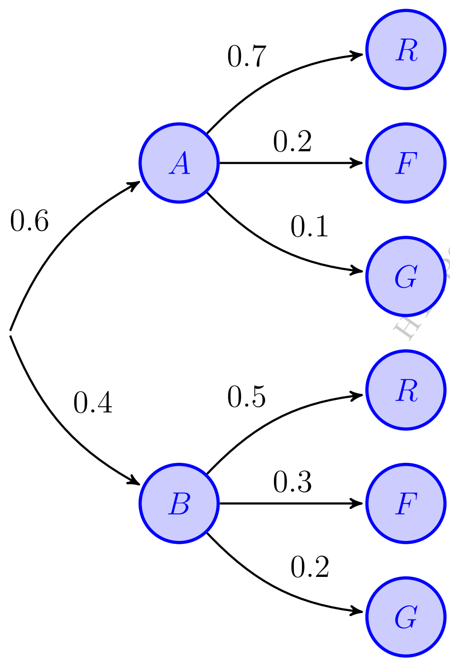
a) (0.5 puntos) Dibuja el árbol de probabilidades correspondiente a la situación descrita.

b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que la manzana elegida al azar por un cliente sea de la variedad reineta?

c) (1 punto) Si la manzana elegida no es de la variedad reineta ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producida por el agicultor A?

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Junio 2024 - Bloque A)

Solución.



Sean los sucesos:

$A \equiv$ "El agricultor es el A"
$B \equiv$ "El agricultor es el B"
$R \equiv$ "Produce manzanas reineta"
$F \equiv$ "Produce manzanas fuji"
$G \equiv$ "Produce manzanas golden"

b) $$\begin{aligned} P(R) &= P\Big((A \cap R) \cup (B \cap R)\Big) \\ &= P(A \cap R) + P(B \cap R) \\ &= P(A) \cdot P(R \mid A) + P(B) \cdot P(R \mid B) \\ &= 0.6 \cdot 0.7 + 0.4 \cdot 0.5 = 0.62 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} P(A \mid \overline{R}) &= \frac{P(A \cap \overline{R})}{P(\overline{R})} = \frac{P(A) \cdot P(\overline{R} \mid A)}{1 - P(R)} \\ &= \frac{0.6 \cdot 0.3}{1 - 0.62} = 0.4737 \end{aligned}$$

Ejercicio 1B (2.5 *puntos*)

Según estudios recientes sobre el impacto de la IA (Inteligencia Artificial) en la educación, el 73 % del profesorado ya ha utilizado herramientass de IA en algunas ocasiones. Si en un determinado departamento de la universidad hay 30 profesores.

a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que no hayan utilizado herramientas de IA entre 10 y 15 profesores.

b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que menos de 10 profesores hayan utilizado la IA?

c) (0.5 puntos) Si el número aproximado de profesores que imparte clase en una determinada facultad es de 80, ¿cuántos se espera que hayan utilizado aplicaciones de IA en su trabajo?

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Junio 2024 - Bloque B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Nº de profesores que utilizan la IA”} \longrightarrow X : \mathcal{B}(30, 0.73)$$
$$X' \equiv \text{“Nº de profesores que NO utilizan la IA”} \longrightarrow X' : \mathcal{B}(30, 0.27)$$

a) $X' : \mathcal{B}(30, 0.27) \implies \left\{ \begin{array}{l} n = 30 > 20 \checkmark \\ np = 8.1 > 5 \checkmark \\ nq = 21.9 > 5 \checkmark \end{array} \right\} \implies Y' : \mathcal{N}(np, \sqrt{npq}) = \mathcal{N}(8.1, 2.43)$

$$\begin{aligned} P(10 \leq X' \leq 15) &= P\Big(\frac{9.5 - 8.1}{2.43} \leq Z \leq \frac{15.5 - 8.1}{2.43}\Big) = P(0.58 \leq Z \leq 3.05) \\ &= P(Z \leq 3.05) - P(Z \leq 0.58) = 0.9989 - 0.7190 = 0.2799 \end{aligned}$$

b) $X : \mathcal{B}(30, 0.73) \implies \left\{ \begin{array}{l} n = 30 > 20 \checkmark \\ np = 21.9 > 5 \checkmark \\ nq = 8.1 > 5 \checkmark \end{array} \right\} \implies Y : \mathcal{N}(np, \sqrt{npq}) = \mathcal{N}(21.9, 2.43)$

$$\begin{aligned} P(X < 10) &= P(Y \leq 9.5) = P\Big(Z \leq \frac{9.5 - 21.9}{2.43}\Big) = P(Z \leq -5.1) = P(X \geq 5.1) \\ &= 1 - P(X \leq 5.1) \simeq 1 - 1 \simeq 0 \end{aligned}$$

c) $E[X] = np = 80 \cdot 0.73 = 58.4 \simeq 58$ profesores

Ejercicio 2A (2.5 *puntos*)

Por motivos de ajustes presupuestarios, una empresa multinacional de trabajo a distancia debe despedir al 10 % de sus trabajadores.

a) *(0.75 puntos) En una ciudad hay 10 trabajadores a distancia de esa empresa. ¿Cuál es la probabilidad de que, a lo sumo, 3 sean despedidos?*

b) *(0.75 puntos) En España hay 300 trabajadores a distancia de la citada empresa. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 280 conserven su empleo?*

c) *(1 punto) Teniendo posibles conflictos laborales, la dirección de la empresa, selecciona una muestra aleatoria de 400 de sus trabajadores a distancia, de los que 50 optan por un despido voluntario, incentivado. Hallar un intervalo de confianza al 97 % para la proporción de trabajadores a distancia de la empresa que optarían por un despido voluntario incentivado.*

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Junio 2024 - Bloque A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Nº de trabajadores despedidos”} \longrightarrow X : \mathcal{B}(n, 0.1)$$
$$X' \equiv \text{“Nº de trabajadores que conservan el empleo”} \longrightarrow X' : \mathcal{B}(n, 0.9)$$

a) $X : \mathcal{B}(10, 0.1)$

$$P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = \binom{10}{0} \cdot 0.1^0 \cdot 0.9^{10}$$
$$+ \binom{10}{1} \cdot 0.1^1 \cdot 0.9^9 + \binom{10}{2} \cdot 0.1^2 \cdot 0.9^8 + \binom{10}{3} \cdot 0.1^3 \cdot 0.9^7 = 0.9872$$

b) $$X' : \mathcal{B}(300, 0.9) \implies \left\{ \begin{array}{l} 300 > 20 \checkmark \\ np = 270 > 5 \checkmark \\ nq = 30 > 5 \checkmark \end{array} \right\} \implies Y' : \mathcal{B}(np, \sqrt{npq}) = \mathcal{B}(270, 5.2)$$

$$P(X' \geq 280) = P(Y' \geq 279.5) = P\left(Z \geq \frac{279.5 - 270}{5.2}\right) = P(Z \geq 1.83)$$
$$= 1 - P(Z \leq 1.83) = 1 - 0.9664 = 0.0336$$

c) $n = 400 \quad \& \quad \hat{p} = \dfrac{50}{400} = 0.125 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.875 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.97$

$$1 - \alpha = 0.97 \implies \alpha = 0.03 \implies \alpha/2 = 0.015 \implies 1 - \alpha/2 = 0.985 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.17$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.125 \cdot 0.875}{400}} = 0.0359$$

$$I.C._{97\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{97\,\%}(p) = (0.0891; 0.1609)}$$

Ejercicio 2B (2.5 *puntos*)

Se desea estimar la cantidad media de emisiones de dióxido de carbono (CO_2) por vehículo en una ciudad. Para ello se selecciona una muestra aleatoria de 100 vehículos y se encuentra que la cantidad media de CO_2 emitida por vehículo es de 150 g/km, con una desviación típica de 25 g/km. Suponiendo que esta variable es normal

a) *(0.75 puntos) Determinar un intervalo de confianza del 95 % para la cantidad media de CO_2 emitida por vehículo en la ciudad.*

b) *(1 punto) Si se admite un error máximo de 3.5 g/km, para estimar la cantidad media de CO_2 emitida por vehículo, con un nivel de confianza igual a 0.9 y manteniendo la desviación típica inicial, ¿a cuántos vehículos es necesario medir la cantidad de CO_2.*

c) *(0.75 puntos) Si la medición se realiza a 75 vehículos y se obtuviera la misma media de 150 g/km y el mismo intervalo del apartado a), con una confianza del 86 %, ¿cuál debería ser la desviación típica?*

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Junio 2024 - Bloque B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Emisiones de } CO_2 \text{ (g/km)”} \xrightarrow{n=100} X : \mathcal{N}(150, 25)$$

a) $X : \mathcal{N}(150, 25) \xrightarrow{n=100} \overline{x} = 150 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.95$

$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \dfrac{25}{\sqrt{100}} = 4.9$

$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (145.1; 154.9)}$

b) $n =? \qquad \& \qquad E < 3.5 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.9$

$1 - \alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies \alpha/2 = 0.05 \implies 1 - \alpha/2 = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \dfrac{25}{\sqrt{n}} < 3.5 \implies n > \left(1.645 \cdot \dfrac{25}{3.5}\right)^2 = 138.06 \implies \boxed{n = 139}$

c) $\sigma =? \qquad \& \qquad X : \mathcal{N}(150, \sigma) \xrightarrow{n=75} \overline{x} = 150 \qquad \& \qquad I.C._{86\,\%}(\mu) = (145.1; 154.9)$

$1 - \alpha = 0.86 \implies \alpha = 0.14 \implies \alpha/2 = 0.07 \implies 1 - \alpha/2 = 0.93 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.475$

$E = \dfrac{154.9 - 145.1}{2} = 4.9 \implies E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.475 \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{75}} = 4.9$

$\implies \sigma = \dfrac{4.9 \cdot \sqrt{75}}{1.475} \implies \boxed{\sigma = 28.77}$

Ejercicio 3A (2.5 *puntos*)

La producción de energía en Kw de un panel solar, orientado hacia el sur, durante las horas del día, viene dada por la función:

$$P(t) = \begin{cases} -\dfrac{4}{25} \cdot (t-7) \cdot (t-17) & , \text{si } 7 \leq t \leq 14 \\ \dfrac{3}{25} \cdot (-7t+126) & , \text{si } 14 < t \leq 18 \end{cases}$$

a) *(0.75 puntos) Justificando las respuestas, explica si es continua y derivable.*

b) *(1 punto) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la producción de energía durante el día. ¿A qué hora se alcanzó la máxima producción de energía y a cuánto ascendió?*

c) *(0.75 puntos) ¿A qué hora, se superaron por primera vez los 3 Kw de producción?*

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Junio 2024 - Bloque A)

Solución.

$$P(t) = \begin{cases} -\dfrac{4t^2-96t+476}{25} & , \text{si } 7 \leq t \leq 14 \\ \dfrac{-21t+378}{25} & , \text{si } 14 < t \leq 18 \end{cases} \implies P'(t) = \begin{cases} -\dfrac{8t-96}{25} & , \text{si } 7 < t < 14 \\ \dfrac{-21}{25} & , \text{si } 14 < t \leq 18 \end{cases}$$

a) ▪ `Continuidad:`

- Si $t \neq 14$ la producción de energía es continua por se un polinomio.
- Si $t = 14$
  - $\lim\limits_{t\to 14^-} P(t) = \lim\limits_{t\to 14}\left(-\dfrac{4t^2-96t+476}{25}\right) = \dfrac{84}{25}$
  - $\lim\limits_{t\to 14^+} P(t) = \lim\limits_{t\to 14} \dfrac{-21t+378}{25} = \dfrac{84}{25}$
  - $P(14) = \dfrac{84}{25}$

  $\lim\limits_{t\to 14^-} P(t) = \lim\limits_{t\to 14^+} P(t) = P(14) \implies P(t)$ es continua en $t = 14$.

Por lo tanto la función $P(t)$ es continua en su dominio $[7, 18]$.

▪ `Derivabiliadad:`

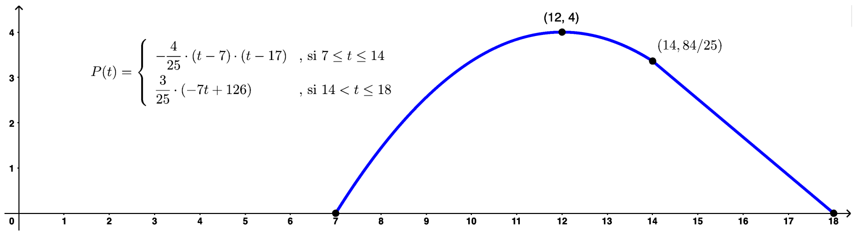
- $P'(14^-) = \lim\limits_{t\to 14^-} P'(t) = \lim\limits_{t\to 14}\left(-\dfrac{8t-96}{25}\right) = -\dfrac{16}{25}$
- $P'(14^+) = \lim\limits_{t\to 14^+} P'(t) = \lim\limits_{t\to 14} \dfrac{-21}{25} = -\dfrac{21}{25}$

$P'(14^-) \neq P'(14^+) \implies P(t)$ no es derivable en $t = 14$.

b) $P'(t) = \begin{cases} -\dfrac{8t-96}{25} = 0 \implies t = 12 \in (7, 14) \\ \dfrac{-21}{25} < 0 \; \forall t \in (14, 18) \end{cases}$

La producción de energía $P(t)$ es *creciente* en $(7, 12)$ y *decreciente* en $(12, 18)$, y tiene un *máximo relativo*, que también es absoluto, en $t = 12$ horas. En ese momento la producción es de $P(12) = 4$ Kw.

	$(7,12)$	$(12,14)$	$(14,18)$
Signo $P'(x)$	$+$	-	-
$P(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Decreciente $\searrow$



c) $P(t) = -\dfrac{4t^2 - 96t + 476}{25} = 3 \implies 4t^2 - 96t + 551 = 0 \implies \begin{cases} t = 9.5 \in [7,14] \\ \cancel{t = 14.5} \notin [7,14] \end{cases}$

No tiene sentido buscar la solución en la segunda de las ramas ya que $t > 9.5$, por lo que la solución es que el primer momento en el que se supera la producción de 3 Kw es en $t = 9.5$ horas.

Ejercicio 3B (2.5 *puntos*)

En un muro de paseo marítimo, se debe recubrir con lona la superficie determinada por $y \le \dfrac{-x^2+9}{3}$, $x \ge 0$ e $y \ge 0$, (las unidades se miden en metros).

a) (0.75 puntos) Representar dicha superficie.

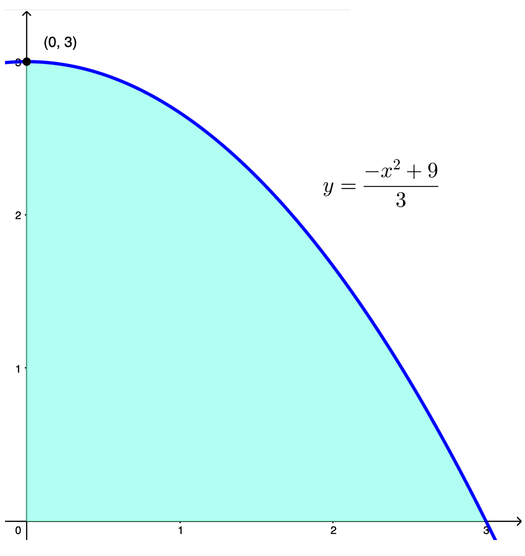
b) (1.25 puntos) ¿Cuántos metros cuadrados tiene la superficie?

c) (0.5 puntos) El precio del metro cuadrado de lona es de 20 euros y, al hacer la instalación, se debe usar un 15 % más de la superficie a cubrir. Además, el coste de instalación es de 5 euros por metro cuadrado de lona adquirida. ¿Cuánto cuesta recubrir la superficie?

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Junio 2024 - Bloque B)

Solución.

a) $y = \dfrac{-x^2+9}{3}$ es una parábola cóncava ($\cap$) con vértice en $(0,3)$ y cortes con los ejes en $(-3,0)$ y $(3,0)$.



b) $\text{Área} = \displaystyle\int_0^3 \frac{-x^2+9}{3}\,dx = -\frac{x^3}{9} + 3x \Big]_0^3$

$= (-3+9) - 0 = 6\ m^2$

c) $S_{\text{material}} = 1.15 \cdot 6 = 6.9\ m^2$

$C_{\text{total}} = C_{\text{material}} + C_{\text{instalación}}$

$= 20 \cdot 6.9 + 5 \cdot 6.9 = 172.5$ €

Ejercicio 4A (2.5 *puntos*)

En una fábrica, en la que se producen mesas y estanterías, se dispone de un total de 150 metros cuadrados de madera y 90 horas de mano de obra. Para fabricar una mesa se necesitan 3 metros cuadrados de madera y 1 hora de mano de obra y para fabricar una estantería se necesitan 4 metros cuadrados de madera 3 horas de mano de obra. La fábrica obtiene un beneficio de 160 € por la producción de cada mesa, y de 225 € por cada estantería.

a) (0.75 puntos) Formular el correspondiente problema de programación lineal.

b) (1 punto) Representar la región factible e indicar cuáles son sus vértices.

c) (0.75 puntos) ¿Cuántos muebles de cada tipo se deben fabricar para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el valor de dicho beneficio?

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Junio 2024 - Bloque A)

Solución.

	Mesas	Estanterías	Restricción
Madera (m^2)	3	4	≤ 150
Mano de obra (h)	1	3	≤ 90
Beneficio (€/ud.)	160	225	

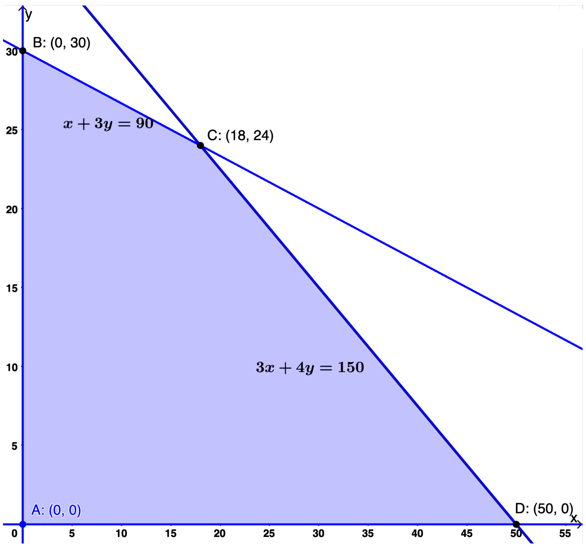
- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de mesas a fabricar"
  $y \equiv$ "Nº de estanterías a fabricar"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} (1)\ 3x+4y \leq 150 & \rightarrow (0,37.5) \quad \& \quad (50,0) \\ (2)\ x+3y \leq 90 & \rightarrow (0,30) \quad \& \quad (90,0) \\ x,y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 160x + 225y$ (€)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	30	6750
C	18	24	8280
D	50	0	8000

El *beneficio máximo* asciende a 8280 €, fabricando y vendiendo 18 mesas y 24 estanterías.

Ejercicio 4B (2.5 *puntos*)

Una jugadora de ajedrez ha conseguido premios en 51 de los torneos en los que ha participado a lo largo de su vida. Los torneos han sido locales, nacionales e internacionales. El número de torneos locales en los que ha jugado ha sido el doble de los nacionales; además, por cada cinco torneos nacionales ha participado en dos internacionales. Los torneos en los que ha conseguido premio representan un 30 % de todos los torneos en los que ha participado.

a) (1.5 puntos) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) (1 punto) ¿En cuántos torneos de cada clase ha participado esta jugadora?

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Junio 2024 - Bloque B)

Solución.

a) Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{“Nº de torneos locales en los que ha participado”}$$
$$y \equiv \text{“Nº de torneos nacionales en los que ha participado”}$$
$$z \equiv \text{“Nº de torneos internacionales en los que ha participado”}$$

Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} x = 2y \\ \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{2} \\ 0.3 \cdot (x+y+z) = 51 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z = 170 \\ x - 2y = 0 \\ 2y - 5z = 0 \end{cases}$$

b) Resolvemos el sistema por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 170 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 170 \\ 0 & -3 & -1 & -170 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 3F_3 + 2F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 170 \\ 0 & -3 & -1 & -170 \\ 0 & 0 & -17 & -340 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x + 50 + 20 = 170 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -3y - 20 = -170 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -17z = -340 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 100 \\ y = 50 \\ z = 20 \end{array}}$$