MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS

EVAU MODELO 2025

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Modelo 2025

Ejercicio 1A (2.5 *puntos*)

La NASA se dispone a lanzar una nave espacial desde su base de Cabo Cañaveral, Florida.

a) *(0.5 puntos) Supongamos que la nave viaje siempre en línea recta. Si se lanza en dirección $\vec{d} = (2,3,6)$ y sabemos que la Luna se encuentra a 384400 km de la Tierra. ¿Cuáles son las coordenadas de la Luna respecto de la base localizada en Cabo Cañaveral?*

b) *(0.5 puntos) Calcula el plano perpendicular a la trayectoria de la nave y que contiene la Luna.*

c) *(0.75 puntos) En lugar de lanzar la nave directamente hacia la Luna, normalmente se hace un primer lanzamiento para ajustar la trayectoria y a continuación se reajusta la trayectoria hacia el destino deseado. Si, partiendo desde la base, el primer lanzamiento se hace en dirección $\vec{d}_{inicial} = (1,1,2)$ inicial, ¿cuál es la dirección que deben poner en el reajuste para llegar a la Luna con esta segunda trayectoria?*

d) *(0.75 puntos) Calcula la intersección de la recta que pasa por la Luna y el vector director $(2,3,6)$, con el plano $z = 0$.*

(Islas Baleares - Matemáticas II - Modelo 2025 - Opción A)

Solución.

a) Sea $T(0,0,0)$ las coordenadas de Cabo Cañaveral y L las de la luna. La ecuación de la trayectoria de la nave es:

$$(x,y,z) = (0,0,0) + \lambda \cdot (2,3,6) = \lambda \cdot (2,3,6)$$

y la distancia entre la tierra y la luna será:

$$d(T,L) = \left|\overrightarrow{TL}\right| = |\lambda(2,3,6)| = |\lambda| \cdot |(2,3,6)| = 7 \cdot |\lambda| = 384400 \implies \lambda = \frac{384400}{7}$$

hemos descartado la solución negativa del parámetro λ, tras lo cual las coordenadas de la Luna serían:

$$L\left(\frac{768800}{7}, \frac{1153200}{7}, \frac{2306400}{7}\right)$$

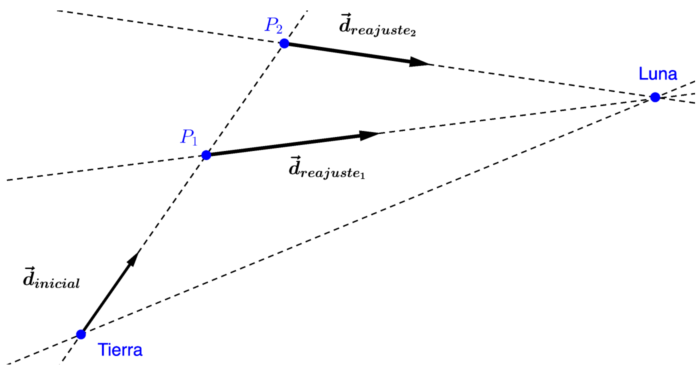
b) $\pi \equiv \begin{cases} L\left(\frac{768800}{7}, \frac{1153200}{7}, \frac{2306400}{7}\right) \\ \vec{n}_\pi = (2,3,6) \end{cases} \implies \pi \equiv 2x + 3y + 6z + D = 0$

$\xrightarrow{L\in\pi} D = -2690800 \implies \pi \equiv 2x + 3y + 6z - 2690800 = 0$

c) Este apartado no se puede resolver con los datos del enunciado pues depende de en qué momento se haga la corrección del rumbo (tal y como muestra la figura adjunta).

Necesitaríamos saber en qué punto se hace el reajuste o la velocidad de la nave y el momento en el que se hace dicho reajuste de la dirección. Suponiendo que el cambio de trayectoria se realiza en P_1, la solución del problema consistiría en:

$$\overrightarrow{TL} = \overrightarrow{TP_1} + \overrightarrow{P_1L} \implies \vec{d}_{reajuste_1} = \overrightarrow{P_1L} = \overrightarrow{TL} - \overrightarrow{TP_1}$$



d) $r \equiv \begin{cases} x = \frac{768800}{7} + 2\lambda \\ y = \frac{1153200}{7} + 3\lambda \\ z = \frac{2306400}{7} + 6\lambda \end{cases}$

$$P = r \cap z = 0 \implies \frac{2306400}{7} + 6\lambda = 0 \implies \lambda = -\frac{384400}{7} \implies P(0,0,0)$$

Lógicamente el plano $z = 0$ pasa por la Tierra y el punto de intersección de la trayectoria de la nave con dicho plano es la Tierra.

Ejercicio 1B (2.5 *puntos*)

Una fábrica de vino de Mallorca, produce 3 tipos de vino: tinto, blanco y rosado. Con la finalidad de saber el precio de cada tipo de vino, hemos comprado vino, el mismo día y en la misma fábrica, de 4 maneras diferentes:

- *Comprando 3 botellas de vino tinto y 2 de vino blanco hemos pagado 67€.*
- *Comprando 2 botellas de vino tinto, 4 de vino blanco y 1 de rosado hemos pagado 85€.*
- *Comprando 1 botella de vino tinto y 1 de vino rosado hemos pagado 21€, y finalmente,*
- *Comprando 4 botellas de vino blanco y 5 de vino rosado hemos pagado 85€.*

a) *(0.75 puntos) Escribe, en forma matricial, el sistema de ecuaciones lineales que se debería resolver para poder averiguar el precio de cada tipo de vino.*

b) *(0.5 puntos) ¿Es necesario tener los datos de las cuatro compras para saber el precio de cada tipo de vino?*

c) *(1.25 puntos) Calcula cuál es el precio de cada tipo de vino.*

(Islas Baleares - Matemáticas II - Modelo 2025 - Opción B)

Solución.

a) Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{“Precio de la botella de vino tinto (€)”} \\ y &\equiv \text{“Precio de la botella de vino blanco (€)”} \\ z &\equiv \text{“Precio de la botella de vino rosado (€)”} \end{aligned}$$

Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 67 \\ 2x + 4y + z = 85 \\ x + z = 21 \\ 4y + 5z = 85 \end{cases}$$

Escribimos el sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 67 \\ 85 \\ 21 \\ 85 \end{pmatrix}$$

b) Un sistema de ecuaciones con 3 incógnitas solo necesita 3 ecuaciones linealemente independientes para ser resuelto. Podríamos quedarnos con el siguiente sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 85 \\ 1 & 0 & 1 & 21 \\ 0 & 4 & 5 & 85 \end{array}\right), \text{ ya que } \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -24 \neq 0 \implies S.C.D.$$

c) Resolvemos el sistema de ecuaciones por el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 85 \\ 1 & 0 & 1 & 21 \\ 0 & 4 & 5 & 85 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ 2F_2 - F_1 \\ \\ \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 85 \\ 0 & -4 & 1 & -43 \\ 0 & 4 & 5 & 85 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ F_3 + F_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 85 \\ 0 & -4 & 1 & -43 \\ 0 & 0 & 6 & 42 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow 2x + 4 \cdot 12.5 + 7 = 85 \\ \Rightarrow -4y + 7 = -43 \\ \Rightarrow 6z = 42 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 14 \text{ €} \\ y = 12.5 \text{ €} \\ z = 7 \text{ €} \end{array}}$$

Ejercicio 2B (2.5 *puntos*)

Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sea $\mathcal{O}$ la matriz nula de orden 2×2.

a) (1 punto) Calcula todas las matrices X tales que $AX - X = B$.

b) (0.75 puntos) Encuentra una matriz Y diferente de $\mathcal{O}$ tal que $(A - B) \cdot Y = \mathcal{O}$.

c) (0.75 puntos) Indica todas las matrices que cumplen la igualdad $AZ = \mathcal{O}$.

(Islas Baleares - Matemáticas II - Modelo 2025 - Opción B)

Solución.

a) $AX - X = B \implies (A - I) \cdot X = B \implies \underbrace{(A - I)^{-1} \cdot (A - I)}_{I} \cdot X = (A - I)^{-1} \cdot B$

$$\implies \boxed{X = (A - I)^{-1} \cdot B}$$

$$A - I = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \implies (A - I)^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = (A - I)^{-1} \cdot B = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} 5/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}$$

b) Sea $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ & $A - B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$(A-B) \cdot Y = \mathcal{O} \implies \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 2c & b - 2d \\ -a + 2c & -b + 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{cases} a - 2c = 0 \Rightarrow a = 2c \Rightarrow \begin{cases} c = \lambda \\ a = 2\lambda \end{cases} \\ b - 2d = 0 \Rightarrow b = 2d \Rightarrow \begin{cases} d = \mu \\ b = 2\mu \end{cases} \\ -a + 2c = 0 \implies a = 2c \checkmark \\ -b + 2d = 0 \implies b = 2d \checkmark \end{cases} \implies \boxed{Y = \begin{pmatrix} 2\lambda & 2\mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} \forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$$

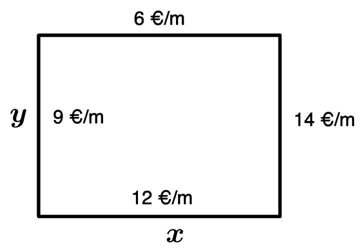
c) $|A| = 9 \neq 0 \implies \exists A^{-1} \implies AZ = \mathcal{O} \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot Z = A^{-1} \cdot \mathcal{O} \implies \boxed{Z = \mathcal{O}}$

Ejercicio 1C (2.5 *puntos*)

Queremos vallar un campo rectangular utilizando diferentes materiales en cada lado. Empezando por el fondo del campo y moviéndonos alrededor de éste, en el sentido contrario a las agujas del reloj, el coste del material para cada lado es de 6€/m, 9€/m, 12€/m y 14€/m, respectivamente. Si tenemos que gastar exactamente. 1000€ para comprar el material del cercado, determina las dimensiones del campo que maximizan el área encerrada.

(Islas Baleares - Matemáticas II - Modelo 2025 - Opción C)

Solución.



$$\left\{ \begin{array}{l} C = x \cdot (12+6) + y \cdot (9+14) = 1000 \Rightarrow y = \dfrac{1000-18x}{23} \\ S(x,y) = xy \end{array} \right\} \Rightarrow S(x) = \frac{1000x - 18x^2}{23}$$

$$C'(x) = \frac{1000-36x}{23} = 0 \implies 1000 - 36x = 0 \implies x = \frac{250}{9} \simeq 27.78$$

$$C''(x) = -\frac{36}{23} \implies C''(250/9) = -\frac{36}{23} < 0 \overset{(\cap)}{\implies} \text{Máximo en } x = \frac{250}{9}$$

Por lo tanto las dimensiones del campo que maximizan su superficie son:

$$x = \frac{250}{9} \simeq 27.78 \qquad \& \qquad y = \frac{1000 - 18 \cdot \frac{250}{9}}{23} = \frac{500}{23} \simeq 21.74$$

Ejercicio 2C (2.5 *puntos*)

La cantidad de agua infectada por una bacteria se espera que siga la función $f(x) = e^{-x} + 0.15x + 1$ siendo $x \geq 0$ los días de infección y $f(x)$ las toneladas de agua infectada.

a) (1 punto) ¿Cuántas toneladas de agua había inicialmente infectadas por la bacteria? ¿Hacia qué valor tiende la cantidad de agua infectada? Interpreta los resultados.

b) (1 punto) ¿En qué momento hay menos cantidad de agua infectada? ¿Cuántas toneladas hay en ese momento?

c) (0.5 puntos) ¿Hay algún momento en el que el agua no esté infectada? Justifica la respuesta.

(Islas Baleares - Matemáticas II - Modelo 2025 - Opción C)

Solución.

$$f(x) = e^{-x} + 0.15x + 1 \quad \& \quad f'(x) = -e^{-x} + 0.15 \quad \& \quad f''(x) = e^{-x}$$

a) $f(0) = 1 + 0 + 1 = 2$ toneladas de agua infectada en el inicio.

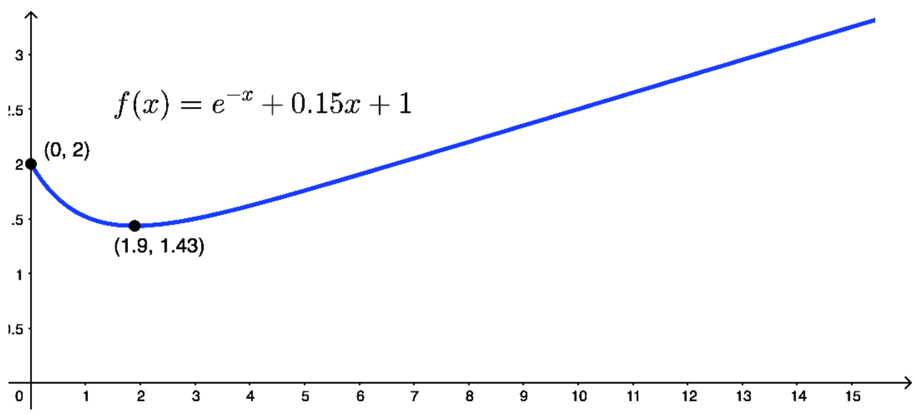
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (e^{-x} + 0.15x + 1) = 0 + \infty + 1 = +\infty$, lo que indica que, a partir de determinado momento que hallaremos en el apartado b), la cantidad de agua infectada tiende a ser cada vez mayor con el tiempo, acabando por estar toda infectada.

b) $f'(x) = -e^{-x} + 0.15 = 0 \implies e^{-x} = 0.15 \implies x = -\ln 0.15 \simeq 1.897$

$f''(x) = e^{-x} \implies f''(-\ln 0.15) = 0.15 > 0 \xrightarrow{(\cup)}$ Mínimo relativo en $x = -\ln 0.15$, que es también absoluto al ser menor que el valor inicial de $f(0) = 2$.

Por lo tanto el valor mínimo de agua contaminada se produce tras 1.897 días de infección y valdrá $f(1.897) \simeq 1.435$ Tm de agua.

c) Como hemos visto, el mínimo absoluto de agua contaminada es mayor que cero por lo que no hay ningún momento en el que el agua no esté infectada.
Otra forma de ver lo mismo es pensar que $f(x) = e^{-x} + 0.15x + 1 > 0 \; \forall x \geq 0$, luego no hay ningún punto en donde se anule.



Ejercicio 1D (2.5 *puntos*)

Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral tales que satisfacen que

$$P(A \cup B) = 0.7 \quad \& \quad P(A \cap B) = 0.1 \quad \& \quad P(A \cap B^c) = 0.35$$

Siendo B^c el suceso complementarioi de B, calcular:

a) *(0.75 puntos) $P(A)$.*

b) *(0.75 puntos) $P(B)$.*

c) *(0.5 puntos) $P(A^c \cup B^c)$*

d) *(0.5 puntos) ¿Son A y B sucesos independientes?*

(Islas Baleares - Matemáticas II - Modelo 2025 - Opción D)

Solución.

Utilizaremos la notación $\overline{A}$ para denotar al suceso complementario del suceso A.

a) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) \implies 0.35 = P(A) - 0.1 \implies \boxed{P(A) = 0.45}$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0.7 = 0.45 + P(B) - 0.1 \implies \boxed{P(B) = 0.35}$

c) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.1 \implies \boxed{P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0.9}$

d) $$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.1 \\ P(A) \cdot P(B) = 0.45 \cdot 0.35 = 0.1575 \end{array} \right\} \implies \left| \begin{array}{c} P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \\ A \text{ y } B \text{ no son independientes} \end{array} \right.$$

Ejercicio 2D (2.5 *puntos*)

> *El 38 % de los habitantes de un pueblo afirman que su deporte favorito es la natación, mientras que el 21 % prefieren el ciclismo y los habitantes restantes se inclinan más por otros deportes. Si se escoge al azar una persona y, acto seguido otra diferente, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:*
>
> *a) (3 puntos) Que las dos personas sean aficionadas a la natación.*
>
> *b) (3 puntos) Que una de las dos personas sea aficionada al ciclismo y la otra a la natación.*
>
> *c) (4 puntos) Sabiendo que la primera prefiere el ciclismo, que la segunda no prefiera este deporte.*
>
> *(Islas Baleares - Matemáticas II - Modelo 2025 - Opción D)*

Solución.

Sean los sucesos:

$$N_i \equiv \text{“La persona elegida en posición } i \text{ practica la natación”}$$
$$C_i \equiv \text{“La persona elegida en posición } i \text{ practica el ciclismo”}$$
$$O_i \equiv \text{“La persona elegida en posición } i \text{ practica la otro deporte”}$$

Este ejercicio está mal planteado pues si escogemos al azar una persona y seguidamente otra diferente estamos hablando de sucesos dependientes. Si supiésemos el tamaño de la muestra (por ejemplo 100) tendríamos que $P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \cdot P(N_2 \mid N_1) = \dfrac{38}{100} \cdot \dfrac{37}{99}$. Como no determinan el tamaño de la muestra, la única forma de resolverlo es suponer que la muestra es lo suficientemente grande para que $P(N_1) = P(N_2 \mid N_1) = 0.38$, es decir, que ambos sucesos fuesen equiprobables y por tante *independientes*. Un auténtico despropósito pero esto es lo que hay ;)

Tenemos por tanto las probabilidades:

$$P(N_1) = P(N_2) = 0.38 \quad \& \quad P(C_1) = P(C_2) = 0.21 \quad \& \quad P(O_1) = P(O_2) = 0.41$$

a) $P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \cdot P(N_2) = 0.38^2 = 0.1444$

b) $P\Big((C_1 \cap N_1) \cup (N_1 \cap C_2)\Big) = P(C_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap C_2) = P(C_1) \cdot P(N_2) + P(N_1) \cdot P(C_2)$

$$= 0.21 \cdot 0.38 + 0.38 \cdot 0.21 = 0.1596$$

c) $P(\overline{C}_2 \mid C_1) = \dfrac{P(C_1 \cap \overline{C}_2)}{P(C_1)} = \dfrac{P(C_1) \cdot P(\overline{C}_2)}{P(C_1)} = \dfrac{0.21 \cdot (1 - 0.21)}{0.21} = 0.79$

Este resultado era esperable con los postulados de los que hemos partido ya que si hemos asumido que los sucesos C_1 y C_2 son independientes:

$$P(\overline{C}_2 \mid C_1) = P(\overline{C}_2) = 1 - P(C_2) = 1 - 0.21 = 0.79$$