MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JULIO 2024
- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2024 (Extraordinario)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ & $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ & $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

a) (3 puntos) Calcula la matriz $M = A^\top A - BB^\top$*, donde* $A^\top$ *y* $B^\top$ *representan las matrices transpuestas de* A *y* B *respectivamente.*

b) (3 puntos) Justifica si M *es o no invertible. En caso afirmativo, resuelve los sistemas de ecuaciones*

$$M \cdot \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad M \cdot \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

para calcular la inversa de la matriz M*. Comprueba que la matriz* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *para los valores de* a*,* b*,* c *y* d *calculados, es la matriz inversa de* M*.*

c) (4 puntos) Calcula la matriz X *que cumple la igualdad* $XM + A = C$*.*

(Islas Baleares - Matemáticas II - Julio 2024)

Solución.

a) $M = A^\top A - BB^\top = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $|M| = -2 \neq 0 \implies \exists M^{-1} = \dfrac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$$M \cdot \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M \cdot \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \implies M \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

c) $X \cdot M + A = C \implies X \cdot M = C - A \implies X \cdot \underbrace{M \cdot M^{-1}}_{I} = (C - A) \cdot M^{-1}$

$$\implies \boxed{X = (C - A) \cdot M^{-1}}$$

$$X = \left[\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right] \cdot \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} -7/2 & 4 \\ 3/2 & -2 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Sea I_3 la matriz identidad de orden 3×3 y A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (4 puntos) Calcula la matriz $B = 3A - kI_3$, indicando su expresión en función del parámetro real k.

b) (4 puntos) Discute el rango de la matriz B según el parámetro k.

c) (2 puntos) ¿Para qué valores de k se puede calcular la inversa de B? Justifica la respuesta.

(Islas Baleares - Matemáticas II - Julio 2024)

Solución.

a) $B = 3A - kI_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix} - k\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-k & 0 & 0 \\ 6 & -k & 0 \\ -6 & 3 & 3-k \end{pmatrix}$

b) $|B| = -k\cdot(3-k)^2 = 0 \implies k = \{0,3\}$

- Si $k \neq \{0,3\} \implies |B| \neq 0 \implies \mathrm{ran}(B) = 3$
- Si $k = 0 \implies B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

  $|B| = 0 \implies \mathrm{ran}(B) < 3$, y como $\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \mathrm{ran}(B) = 2$
- Si $k = 3 \implies B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

  $|B| = 0 \implies \mathrm{ran}(B) < 3$, y como $\left\{ \begin{array}{c} F_1 = 0 \\ F_2 = -F_3 \end{array} \right\} \implies \mathrm{ran}(B) = 1$

c) $\exists\, B^{-1} \iff |B| \neq 0 \implies \exists\, B^{-1}\ \forall k \neq \{0,3\}$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Sean $P(-1,1,1)$, $Q(7,1,7)$ y $R(-4,1,5)$ puntos de $\mathbb{R}^3$.

a) (3 puntos) Comprueba que los tres puntos forman un triángulo rectángulo. Indica cuál de los 3 ángulos es recto.

b) (3 puntos) ¿Se podría construir un cuadrado añadiendo un solo vértice más? Justifica la respuesta.

c) (4 puntos) Prueba que, para todo valor de a real, el punto $S(a,1,0)$ es coplanario con P, Q y R.

(Islas Baleares - Matemáticas II - Julio 2024)

Solución.

a) $\overrightarrow{PQ} = (8,0,6) \quad \& \quad \overrightarrow{PR} = (-3,0,4) \quad \& \quad \overrightarrow{QR} = (-11,0,-2)$

$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = (8,0,6) \cdot (-3,0,4) = -24 + 24 = 0 \implies \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{PR}$

Por lo tanto los tres puntos no están alineados y el triángulo $P\overset{\triangle}{Q}R$ que forman es rectángulo con ángulo recto en el vértice P.

b) $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = |(8,0,6)| = 10 \quad \& \quad \left|\overrightarrow{PR}\right| = |(-3,0,4)| = 5$

Por lo tanto no es posible formar un cuadrado añadiendo un solo punto debido a que los lados que forman un ángulo recto (catetos del triángulo $P\overset{\triangle}{Q}R$) no miden lo mismo (podríamos llegar a conseguir un rectángulo).

c) $\overrightarrow{PS} = (a+1,0,-1) \quad \& \quad \left[\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PS}\right] = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 6 \\ -3 & 0 & 4 \\ a+1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \; \forall a \in \mathbb{R}$

Luego los puntos P, Q, R y S son coplanarios sea cual sea el valor que tome el parámetro a.

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Sean las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \qquad \& \qquad s \equiv x + 1 = \frac{y-1}{2} = z$$

Calcula:

a) *(5 puntos) La posición relativa de las dos rectas. Es decir, si son coincidentes, paralelas, se cortan, o se cruzan. En los últimos dos casos especifica si lo hacen perpendicularmente.*

b) *(5 puntos) La ecuación del plano que es paralelo a las dos rectas r y s, y pasa por el puntos $A(2, 2, 1)$.*

(Islas Baleares - Matemáticas II - Julio 2024)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} R(-1, 0, 1) \\ \vec{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2, -1, 0) \end{cases} \quad \& \quad s \equiv \begin{cases} S(-1, 1, 0) \\ \vec{d_s} = (1, 2, 1) \end{cases} \quad \& \quad \overrightarrow{RS} = (0, 1, -1)$$

a) $\vec{d_r} \nparallel \vec{d_s} \implies r$ y s se cortan o se cruzan

$$\left[\vec{d_r}, \vec{d_s}, \overrightarrow{RS}\right] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \implies r \text{ y } s \text{ se cruzan en el espacio}$$

$$\vec{d}r \cdot \vec{d_s} = (2, -1, 0) \cdot (1, 2, 1) = 2 - 2 = 0 \implies \vec{d_r} \perp \vec{d_s} \implies r \perp s$$

b) $$\pi \equiv \begin{cases} A(2, 2, 1) \\ \vec{u} = \vec{d_r} = (2, -1, 0) \\ \vec{v} = \vec{d_s} = (1, 2, 1) \end{cases} \implies \pi = \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\implies -(x-2) - 2 \cdot (y-2) + 5 \cdot (z-1) = 0 \implies \boxed{\pi \equiv x + 2y - 5z - 1 = 0}$$

Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)

Resuelve los siguientes apartados:

a) *(5 puntos) Dada la función $f(x) = ax + b\sqrt{x}$, determina los valores de a y b sabiendo que $f(x)$ tiene su máximo en $x = 100$ y que pasa por el punto $(49, 91)$.*

b) *(5 puntos) Dada la función*

$$g(x) = \frac{(x-1)\cdot\sqrt{x}}{x^2-1}$$

indica cuál es su dominio. ¿Es $g(x)$ una función continua en su dominio? Justifica la respuesta y, en caso negativo, indica qué tipo de discontinuidad presenta.

(Islas Baleares - Matemáticas II - Julio 2024)

Solución.

a) $f(x) = ax + b\sqrt{x}$ & $f'(x) = a + \dfrac{b}{2\sqrt{x}}$ & $f''(x) = -\dfrac{b}{4x\sqrt{x}}$

- Máximo en $x = 100$: $f'(100) = a + \dfrac{b}{2\sqrt{100}} = a + \dfrac{b}{20} = 0 \implies b = -20a$
- Pasa por $(49, 91)$: $f(49) = 49a + b\sqrt{49} = 49a + 7b = 91 \xrightarrow{b=-20a} \begin{cases} \boxed{a = -1} \\ \boxed{b = 20} \end{cases}$
- $f''(100) = -\dfrac{20}{400\sqrt{100}} = -\dfrac{1}{200} < 0 \implies$ Máximo en $x = 100$

b)
- Dominio: $\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \{-1, 1\} \\ x \geq 0 \end{cases} \implies \mathrm{Dom}(g) = x \in [0, 1) \cup (1, +\infty)$
- `Continuidad en` $x = 1$:
  - $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)\sqrt{x}}{x^2-1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cancel{(x-1)}\cdot\sqrt{x}}{\cancel{(x-1)}\cdot(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}}{x+1} = \dfrac{1}{2}$

    Luego la función $g(x)$ es continua en su dominio $[0, 1) \cup (1, +\infty)$ y en $x = 1$ tiene una discontinuidad evitable.

Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)

Calcula el área de la superficie comprendida entre las curvas $f(x) = 6x - x^2$, $g(x) = x^2 - 2x$ y sus puntos de corte.

(Islas Baleares - Matemáticas II - Julio 2024)

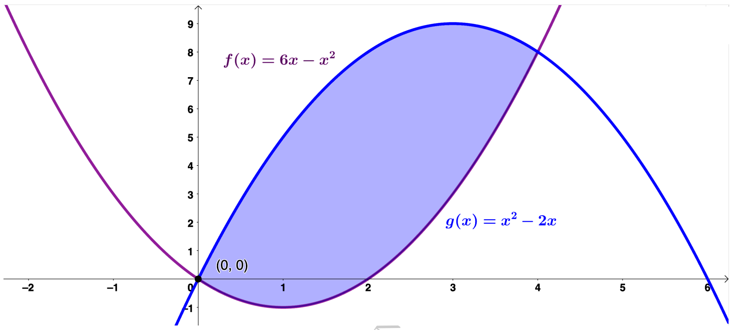
Solución.

$f(x) = g(x) \implies 6x - x^2 = x^2 - 2x \implies 2x^2 - 8x = 2 \cdot (x-4) = 0 \implies x = \{0, 4\}$

Por lo tanto se define un único recinto de integración $A_1 : (0, 4)$

$$A_1 = \int_0^4 [f(x) - g(x)]\,dx = \int_0^4 \left(-2x^2 + 8x\right) dx = -\frac{2x^3}{3} + 4x^2 \Big]_0^4 = -\frac{128}{3} + 64 - 0 = \frac{64}{3}$$

Área $= |A_1| = \dfrac{64}{3} \simeq 21.33\ u^2$



Ejercicio 7 (2.5 *puntos*)

El 38 % de los habitantes de un pueblo afirman que su deporte favorito es la natación, mientras que el 21 % prefieren el ciclismo y los habitantes restantes se inclinan más por otros deportes. Si se escoge al azar una persona y, acto seguido otra diferente, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) (3 puntos) Que las dos personas sean aficionadas a la natación.

b) (3 puntos) Que una de las dos personas sea aficionada al ciclismo y la otra a la natación.

c) (4 puntos) Sabiendo que la primera prefiere el ciclismo, que la segunda no prefiera este deporte.

(Islas Baleares - Matemáticas II - Julio 2024)

Solución.

Sean los sucesos:

$$N_i \equiv \text{“La persona elegida en posición } i \text{ practica la natación”}$$
$$C_i \equiv \text{“La persona elegida en posición } i \text{ practica el ciclismo”}$$
$$O_i \equiv \text{“La persona elegida en posición } i \text{ practica la otro deporte”}$$

Este ejercicio está mal planteado pues si escogemos al azar una persona y seguidamente otra diferente estamos hablando de sucesos dependientes. Si supiésemos el tamaño de la muestra (por ejemplo 100) tendríamos que $P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \cdot P(N_2 \mid N_1) = \dfrac{38}{100} \cdot \dfrac{37}{99}$. Como no determinan el tamaño de la muestra, la única forma de resolverlo es suponer que la muestra es lo suficientemente grande para que $P(N_1) = P(N_2 \mid N_1) = 0.38$, es decir, que ambos sucesos fuesen equiprobables y por tanto *independientes*. Un auténtico despropósito pero esto es lo que hay ;)

Tenemos por tanto las probabilidades:

$$P(N_1) = P(N_2) = 0.38 \quad \& \quad P(C_1) = P(C_2) = 0.21 \quad \& \quad P(O_1) = P(O_2) = 0.41$$

a) $P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \cdot P(N_2) = 0.38^2 = 0.1444$

b) $P\Big((C_1 \cap N_1) \cup (N_1 \cap C_2)\Big) = P(C_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap C_2) = P(C_1) \cdot P(N_2) + P(N_1) \cdot P(C_2)$

$$= 0.21 \cdot 0.38 + 0.38 \cdot 0.21 = 0.1596$$

c) $P(\overline{C}_2 \mid C_1) = \dfrac{P(C_1 \cap \overline{C}_2)}{P(C_1)} = \dfrac{P(C_1) \cdot P(\overline{C}_2)}{P(C_1)} = \dfrac{0.21 \cdot (1 - 0.21)}{0.21} = 0.79$

Este resultado era esperable con los postulados de los que hemos partido ya que si hemos asumido que los sucesos C_1 y C_2 son independientes:

$$P(\overline{C}_2 \mid C_1) = P(\overline{C}_2) = 1 - P(C_2) = 1 - 0.21 = 0.79$$

Ejercicio 8 (2.5 *puntos*)

El peso, en gramos, de las judías en lata se distribuye normalmente con media μ y desviación típica 7.8. Teniendo en cuenta que el 10 % de estas latas contienen menos de 200 g, calcula:

a) (6 puntos) El valor de la media μ redondeándola a las unidades.

b) (2 puntos) El porcentaje de latas que contienen más de 225 g de judías. Nota: utiliza la media redondeada a las unidades.

c) (2 puntos) El porcentaje de latas que contienen entre 190 g y 225 g de judías. Nota: utiliza la media redondeada a las unidades.

(Islas Baleares - Matemáticas II - Julio 2024)

Solución.

$$X \equiv \text{“Peso de las judías en lata (g)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 7.8)$$

a)
$$P(X<200) = P\left(Z < \frac{200-\mu}{7.8}\right) = P\left(Z > \frac{-200+\mu}{7.8}\right)$$
$$= 1 - P\left(Z < \frac{-200+\mu}{7.8}\right) = 0.1 \implies P\left(Z < \frac{-200+\mu}{7.8}\right) = 0.9$$
$$\xRightarrow{\textit{Tabla}} \frac{-200+\mu}{7.8} = 1.28 \implies \boxed{\mu = 209.98 \simeq 210}$$

b)
$$P(X>225) = P\left(Z > \frac{225-210}{7.8}\right) = P(Z>1.92) = 1 - P(Z<1.92)$$
$$= 1 - 0.9726 = 0.0274 \implies 2.74\,\%$$

c)
$$P(190<X<225) = P\left(\frac{190-210}{7.8} < Z < \frac{225-210}{7.8}\right) = P(-2.56 < Z < 1.92)$$
$$= P(Z<1.92) - P(Z<-2.56) = P(Z<1.92) - P(Z>2.56)\Big]$$
$$= P(Z<1.92) - \Big[1 - P(Z<2.56)\Big] = 0.9726 - (1 - 0.9948)$$
$$= 0.9674 \implies 96.74\,\%$$