



Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Justifique las respuestas usando lenguaje matemático y/o no matemático, según corresponda. Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos obtenidos entre 4.

Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos que puedan transmitir o almacenar información.

P1. — Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) [3 puntos] Calcula la matriz $M = A^T A - B B^T$, donde A^T y B^T representan las matrices transpuestas de A y B respectivamente.
- (b) [3 puntos] Justifica si M es o no invertible. En caso afirmativo, resuelve los sistemas de ecuaciones

$$M \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \quad M \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

para calcular la inversa de la matriz M . Comprueba que la matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

para los valores de a , b , c y d calculados, es la matriz inversa de M .

- (c) [4 puntos] Calcula la matriz X que cumple la igualdad $XM + A = C$.

P2. — Sea I_3 la matriz identidad de orden 3×3 y A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) [4 puntos] Calcula la matriz $B = 3A - kI_3$, indicando su expresión en función del parámetro real k .
- (b) [4 puntos] Discute el rango de la matriz B según el parámetro k .
- (c) [2 puntos] ¿Para qué valores de k se puede calcular la inversa de B ? Justifica la respuesta.

P3. — Sean $P = (-1, 1, 1)$, $Q = (7, 1, 7)$ y $R = (-4, 1, 5)$ puntos de $\mathbb{R}^3$.

- (a) [3 puntos] Comprueba que los tres puntos forman un triángulo rectángulo. Indica cuál de los 3 ángulos es recto.
- (b) [3 puntos] ¿Se podría construir un cuadrado añadiendo un solo vértice más? Justifica la respuesta.
- (c) [4 puntos] Prueba que, para todo valor de a real, el punto $S = (a, 1, 0)$ es coplanario con P , Q y R .



P4. — Sean las rectas

$$r : \begin{cases} x + 2y = -1, \\ z = 1, \end{cases} \quad \text{y} \quad s : x + 1 = \frac{y - 1}{2} = z.$$

Calcula:

- (a) [5 puntos] La posición relativa de las dos rectas. Es decir, si son coincidentes, paralelas, se cortan, o se cruzan. En los últimos dos casos especifica si lo hacen perpendicularmente.
- (b) [5 puntos] La ecuación del plano que es paralelo a las dos rectas r y s , y pasa por el punto $A = (2, 2, 1)$.

P5. — Resuelve los siguientes apartados:

- (a) [5 puntos] Dada la función $f(x) = ax + b\sqrt{x}$, determina los valores de a y b sabiendo que $f(x)$ tiene su máximo en $x = 100$ y que pasa por el punto $(49, 91)$.
- (b) [5 puntos] Dada la función

$$g(x) = \frac{(x-1)\sqrt{x}}{x^2-1},$$

indica cuál es su dominio. ¿Es $g(x)$ una función continua en su dominio? Justifica la respuesta y, en caso negativo, indica qué tipo de discontinuidad presenta.

P6. — [10 puntos] Calcula el área de la superficie comprendida entre las curvas $f(x) = 6x - x^2$, $g(x) = x^2 - 2x$ y sus puntos de corte.

P7. — El 38% de los habitantes de un pueblo afirman que su deporte favorito es la natación, mientras que el 21% prefieren el ciclismo y los habitantes restantes se inclinan más por otros deportes. Si se escoge al azar una persona y, acto seguido otra diferente, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

- (a) [3 puntos] Que las dos personas sean aficionadas a la natación.
- (b) [3 puntos] Que una de las dos personas sea aficionada al ciclismo y la otra a la natación.
- (c) [4 puntos] Sabiendo que la primera prefiere el ciclismo, que la segunda no prefiera este deporte.

P8. — El peso, en gramos, de las judías en lata se distribuye normalmente con media μ y desviación típica 7.8. Teniendo en cuenta que el 10% de estas latas contienen menos de 200 g, calcula:

- (a) [6 puntos] El valor de la media μ redondeándola a las unidades.
- (b) [2 puntos] El porcentaje de latas que contienen más de 225 g de judías. Nota: utiliza la media redondeada a las unidades.
- (c) [2 puntos] El porcentaje de latas que contienen entre 190 g y 225 g de judías. Nota: utiliza la media redondeada a las unidades.



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla de la distribución normal $\mathcal{N}(0, 1)$.