MATEMATICAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2024

- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2024 (Ordinario)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Una empresa está considerando la fabricación de tres tipos de armarios diferentes, A, B y C. Dispone de metal y madera.

- *Para fabricar cada unidad del modelo A, se requieren 5 kg de metal y 5 horas de trabajo de un operario (no se requiere madera).*
- *Por unidad del modelo B, 10kg de metal, 10 kg de madera, y 10 horas de trabajo.*
- *Por unidad del modelo C, 15 kg de metal y 5 horas de trabajo (no se requiere madera).*

a) (2 puntos) Si queremos producir 10 unidades de cada tipo, ¿cuántos kg de cada material necesitamos?

b) (4 puntos) Si disponemos de 1550 kg de metal, 600 kg de madera y 1050 horas de trabajo de operarios, ¿cuántas unidades de cada tipo tenemos que fabricar para utilizar completamente todos los recursos?

c) (4 puntos) Supón ahora que disponemos de 1550 kg de metal, toda la madera que necesitemos (sin límite) y 1050 horas de trabajo, pero por limitaciones del almacén solo podemos producir 125 unidades en total. En este caso, ¿podemos utilizar completamente el metal, las horas y el almacén?

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

a) Para fabricar 10 armarios de cada tipo necesitaremos:

- *Madera:* $10 \cdot 10 = 100$ kg
- *Metal:* $10 \cdot (5 + 10 + 15) = 300$ kg

b) Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{“Nº de unidades del armario } A \text{ a fabricar”}$$
$$y \equiv \text{“Nº de unidades del armario } B \text{ a fabricar”}$$
$$z \equiv \text{“Nº de unidades del armario } C \text{ a fabricar”}$$

$$\begin{cases} 5x + 10y + 15z = 1550 \\ 10y = 600 \\ 5x + 10y + 5z = 1050 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 310 \\ y = 60 \\ x + 2y + z = 210 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 310 \\ 0 & 1 & 0 & 60 \\ 1 & 2 & 1 & 210 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 310 \\ 0 & 1 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & -2 & -100 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + 2 \cdot 60 + 3 \cdot 50 = 310 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y = 60 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2z = -100 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 40 \text{ ud. de } A \\ y = 60 \text{ ud. de } B \\ z = 50 \text{ ud. de } C \end{array}}$$

c) Con las mismas incógnitas tenemos:

$$\begin{cases} x+y+z=125 \\ 5x+10y+15z=1550 \\ 5x+10y+5z=1050 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=125 \\ x+2y+3z=310 \\ x+2y+z=210 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 125 \\ 1 & 2 & 3 & 310 \\ 1 & 2 & 1 & 210 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 125 \\ 0 & 1 & 2 & 185 \\ 0 & 1 & 0 & 85 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3-F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 125 \\ 0 & 1 & 2 & 185 \\ 0 & 0 & -2 & -100 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x+85+50=125 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y+2\cdot 50=185 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2z=-100 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=-10 \text{ ud. de } A \\ y=85 \text{ ud. de } B \\ z=50 \text{ ud. de } C \end{array}}$$

Dado que la solución no es posible (el nº de unidades de A no puede ser negativo), no podemos utilizar completamente el metal, las horas y el almacén.

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Un cliente nos pide ayuda para invertir un máximo de 10000 € en dos productos de inversión diferentes: acciones y bonos. El cliente quiere invertir al menos la misma cantidad en acciones que en bonos. Además, el cliente quiere invertir entre 2000 € y 8000 € en bonos; y entre 4000 € y 6000 € en acciones.
El interés previsto para las acciones es de un 6 % anual, y para los bonos es de un 2 % anual.

a) (3 puntos) Plantea la maximización del interés previsto por las inversiones como un problema de programación lineal.

b) (5 puntos) Dibuja la región factible, indicando las rectas y vértices que la delimitan.

c) (2 puntos) ¿Cuál tendría que ser la inversión de cada tipo de producto para maximizar el interés anual previsto? ¿Cuánto dinero se generaría con esta inversión?

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

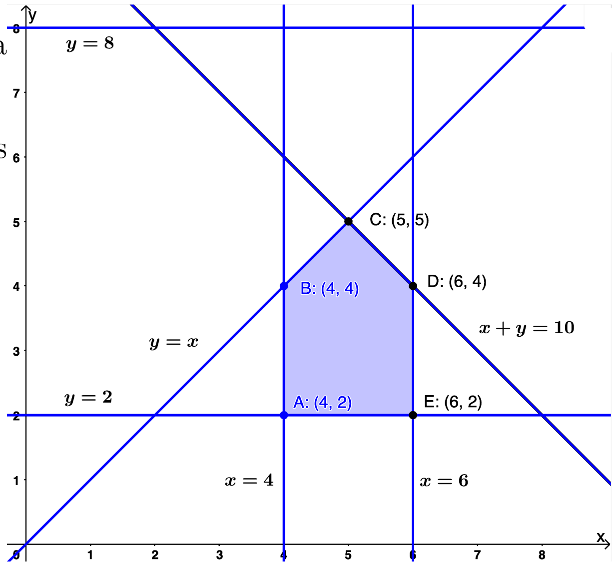
- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Inversión en acciones (miles de €)"
  $y \equiv$ "Inversión en bonos (miles de €)"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} (1)\ x+y \le 10 & \rightarrow (0,10) \quad \& \quad (10,0) \\ (2)\ x \ge y & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (10,10) \\ (3)\ 4 \le x \le 6 & \rightarrow (4,0) \quad \& \quad (6,0) \\ (4)\ 2 \le y \le 8 & \rightarrow (0,2) \quad \& \quad (0,8) \\ x,y \ge 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 0.06x + 0.02y$ (miles de €)
- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.
- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	4	2	0.28
B	4	4	0.32
C	5	5	0.4
D	6	4	0.44
E	6	2	0.4



El *máximo interés* es de $0.44 \Rightarrow 440$ €, invirtiendo 6000 € en acciones y 4000 € en bonos.

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Considera la función $f(x) = \sqrt{x}$.

a) *(7 puntos) Haz un gráfico esquemático de la función $f(x)$, indicando el dominio, el comportamiento en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales.*
Indicación: para el apartado b), el eje horizontal debería llegar hasta $x = 30$.

b) *(3 puntos) Traza, sobre la gráfica, la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = 25$ e indica su pendiente.*

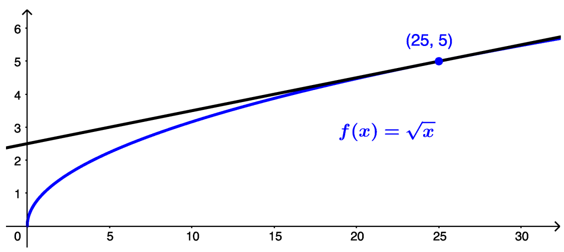
(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

a)
- `Dominio:` $x \geq 0 \implies \text{Dom}(f) = [0, +\infty)$
- $f(0) = \sqrt{0} = 0 \quad \& \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \implies f(x)$ es creciente en $\text{Dom}(f)$ y $\nexists$ Ptos. críticos

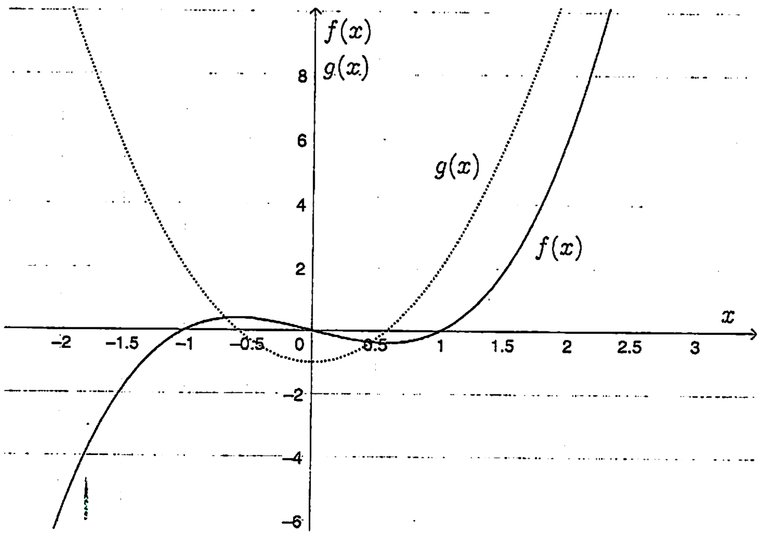
b) $x_0 = 25 \implies y_0 = f(x_0) = f(25) = 5 \quad \& \quad m_r = f'(25) = \frac{1}{2\sqrt{25}} = \frac{1}{10}$

$y - 5 = \frac{1}{10} \cdot (x - 25) \implies r \equiv y = \frac{1}{10}x + \frac{5}{2}$



Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Considera dos funciones, $f(x)$ y $g(x)$, representadas en la gráfica siguiente:



a) *(3 puntos) Sabemos que una de las funciones es $x \cdot (x-1) \cdot (x+1)$ y que la otra es $(x - 1/\sqrt{3}) \cdot (x + 1/\sqrt{3})$, pero no sabemos cuál es cuál. Deduce, en base a la gráfica, cuál es $f(x)$ y cuál es $g(x)$. Justifica la respuesta.*

b) *(3 puntos) Sabemos que una de ellas es la derivada de la otra. Di cuál es cuál: ¿es $f(x) = g'(x)$? ¿o bien es $g(x) = f'(x)$?*

c) *(4 puntos) Calcula el área entre la función $g(x)$ y el eje de abscisas, que se encuentra comprendida entre los puntos en que $g(x) = 0$.*

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

a) Veamos los puntos de corte de ambas funciones con el eje X:

$$x\cdot(x-1)\cdot(x+1) = 0 \Rightarrow x = \{-1, 0, 1\} \quad \& \quad \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Por lo tanto: $f(x) = x \cdot (x-1) \cdot (x+1) \quad \& \quad g(x) = (x - 1/\sqrt{3}) \cdot (x + 1/\sqrt{3})$

b) $f(x) = x \cdot (x-1) \cdot (x+1) = x^3 - x \implies f'(x) = 3x^2 - 1 \neq g(x)$

$g(x) = (x - 1/\sqrt{3}) \cdot (x + 1/\sqrt{3}) = x^2 - 1/3 \implies g'(x) = 2x \neq f(x)$

Por lo tanto ninguna función es la derivada de la otra.

c) Los puntos de corte de la función $g(x)$ y el eje de abscisas son $x = \pm 1/\sqrt{3}$, lo que define un único recinto de integración $A_1 : (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$

$$A_1 = \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} g(x)\,dx = \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) dx = \left.\frac{x^3}{3} - \frac{x}{3}\right]_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{27} - \frac{2\sqrt{3}}{27} = -\frac{4\sqrt{3}}{27}$$

$$\text{Área} = |A_1| = \frac{4\sqrt{3}}{27} \simeq 0.257\ u^2$$

Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)

Según un modelo, la población de una ciudad determinada, p (en millones de habitantes), depende del tiempo que ha pasado, t (en años), desde el inicio del año 2000*, según la relación*

$$p(t) = \frac{4}{1 + 3 \cdot e^{-0.2t}}, \text{ para } t \geq 0.$$

Te proporcionamos la siguiente información, que puedes utilizar si así lo consideras:

$$p'(t) = \frac{2.4 \cdot e^{-0.2t}}{\left(1 + 3 \cdot e^{-0.2t}\right)^2} \qquad \& \qquad \int p(t)\, dt = 20 \cdot \ln\left(e^{0.2t} + 3\right) + C, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

a) (3 puntos) ¿Qué población teníamos al inicio del año 2000 *(es decir, para* $t = 0$*)? ¿Qué año tuvimos exactamente* 2 *millones de habitantes?*

b) (3 puntos) ¿En qué intervalos la población aumenta? ¿En cuáles disminuye?

c) (4 puntos) ¿A qué tiende la población de la ciudad a largo plazo? ¿A qué tiende el ritmo de crecimiento de la población a largo plazo?

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

a) $p(0) = \dfrac{4}{1 + 3 \cdot e^0} = 1$ millón de habitantes a comienzos del 2000

$p(t) = \dfrac{4}{1 + 3 \cdot e^{-0.2t}} = 2 \implies 4 = 2 + 6 \cdot e^{-0.2t} \implies \dfrac{1}{3} = e^{-0.2t} \implies \ln \dfrac{1}{3} = -0.2t$

$\implies -\ln 3 = -0.2t \implies t = 5 \ln 3 \simeq 5.493 \Rightarrow$ a mediados de 2005 hay 2 millones.

b) $p'(t) = \dfrac{2.4 \cdot e^{-0.2t}}{\left(1 + 3 \cdot e^{-0.2t}\right)^2} > 0, \ \forall t \geq 0$, luego la población crece constantemente.

c) $\lim\limits_{t \to +\infty} p(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{4}{1 + 3 \cdot e^{-0.2t}} = \dfrac{4}{1 + 0} = 4$ millones de habitantes en el futuro

$\lim\limits_{t \to +\infty} p'(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{2.4 \cdot e^{-0.2t}}{\left(1 + 3 \cdot e^{-0.2t}\right)^2} = \dfrac{0}{1 + 0} = 0$, el crecimiento tiende a cero.

Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)

En una población,

- *el* 50 % *de habitantes con mayor poder adquisitivo tienen una probabilidad de vivir de alquiler de un* 10 %.
- *el* 50 % *de habitantes con menor poder adquisitivo tienen una probabilidad de vivir de alquiler de un* 40 %.

a) (4 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que escogiendo un habitante al azar, este viva de alquiler?

b) (3 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que, escogiendo de manera independiente tres habitantes al azar, los tres vivan de alquiler?

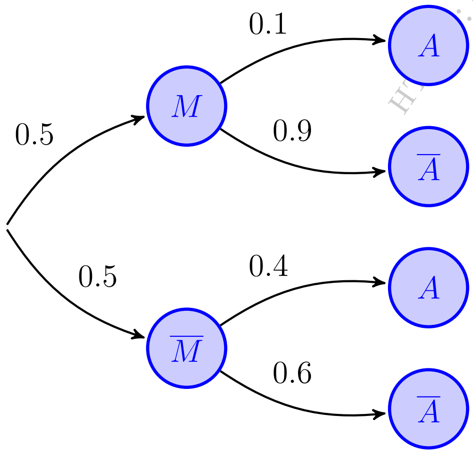
c) (3 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que, escogiendo de manera independiente tres habitantes al azar, al menos uno de los tres viva de alquiler?

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

Sean los sucesos:

$$M \equiv \text{“La parsona es de mayor poder adquisitivo”}$$
$$\overline{M} \equiv \text{“La persona es de menor porder adquisitivo”}$$
$$A \equiv \text{“La persona vive de alquiler”}$$



a) $$\begin{aligned} P(A) &= P\big((M\cap A)\cup(\overline{M}\cap A)\big) \\ &= P(M\cap A)+P(\overline{M}\cap A) \\ &= P(M)\cdot P(A\mid M)+P(\overline{M})\cdot P(A\mid \overline{M}) \\ &= 0.5\cdot 0.1+0.5\cdot 0.4 = 0.25 \end{aligned}$$

b) X : “Nº de personas que viven de alquiler”

$$\longrightarrow X : \mathcal{B}(3, 0.25)$$

$$P(X=3)=\binom{3}{3}\cdot 0.25^3\cdot 0.75^0 = 0.0156$$

c) $$\begin{aligned} P(X\geq 1) &= 1-P(X<1) = 1-P(X=0) \\ &= 1-\binom{3}{0}\cdot 0.25^0\cdot 0.75^3 = 1-0.4219 = 0.5781 \end{aligned}$$

Ejercicio 7 (2.5 *puntos*)

La probabilidad de que llueva un día cualquiera es siempre la misma. Ahora bien, si un día cualquiera ha llovido, la probabilidad de que llueva al día siguiente es del 40 %; y si un día cualquiera no ha llovido, la probabilidad de que llueva al día siguiente es del 5 %.
Considera los sucesos siguientes:

- *A: Hoy ha llovido.*
- *B: Mañana lloverá.*

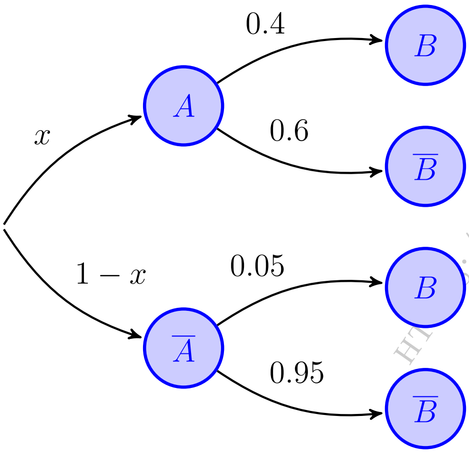
a) (5 puntos) Calcula $P(A)$ y $P(B)$.

b) (5 puntos) ¿Qué es más probable: que llueva mañana si sabemos que ha llovido hoy; o bien que llueva hoy si sabemos que mañana seguro que lloverá?

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

Sean los sucesos descritos en el enunciado tenemos:



a) $P(A) = P(B) = x$

$$P(B) = P\big((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)\big)$$
$$= P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$
$$= P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(B \mid \overline{A})$$
$$\Longrightarrow x = 0.4x + 0.05 \cdot (1 - x)$$
$$\Rightarrow 0.65x = 0.05 \Rightarrow x = P(A) = P(B) = \frac{1}{13}$$

b) $P(B \mid A) = 0.4$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(B)}$$
$$= \frac{\frac{1}{13} \cdot 0.4}{\frac{1}{13}} = 0.4$$

Luego ambas opciones tienen la misma probabilidad.

Ejercicio 8 (2.5 *puntos*)

Según el Instituto Nacional de Estadístitca (INE), la esperanza de vida de una persona nacida en el 2020 es de 79.6 años para los hombres y de 83.6 años para las mujeres. Supongamos también que el número de años que vivirá una persona nacida en el 2020 tiene una desviación típica de $\sigma = 10$ años tanto para los hombres como para las mujeres.

a) (6 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que un hombre nacido en el 2020 viva más de 60 años? ¿Y de que viva entre 60 y 70 años?

b) (4 puntos) ¿Qué es más probable: que un hombre nacido en el 2020 viva más de 89.6 años; o que una mujer nacida en el 2020 viva más de 93.6 años?

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

$$X \equiv \text{“Esperanza de vida de los hombres (años)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(79.6, 10)$$
$$Y \equiv \text{“Esperanza de vida de las mujeres (años)”} \longrightarrow Y : \mathcal{N}(83.6, 10)$$

a) $P(X \geq 60) = P\left(Z \geq \dfrac{60 - 79.6}{10}\right) = P(Z \geq -1.96) = P(Z \leq 1.96) = 0.975$

$$\begin{aligned} P(60 \leq X \leq 70) &= P\left(\frac{60 - 79.6}{10} \leq Z \leq \frac{70 - 79.6}{10}\right) = P(-1.96 \leq Z \leq -0.96) \\ &= P(Z \leq -0.96) - P(Z \leq -1.96) = P(Z \geq 0.96) - P(Z \geq 1.96) \\ &= 1 - P(Z \leq 0.96) - \Big[1 - P(Z \leq 1.96)\Big] \\ &= P(Z \leq 1.96) - P(Z \leq 0.96) = 0.975 - 0.8315 = 0.1435 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} P(X \geq 89.6) &= P\left(Z \geq \frac{89.6 - 79.6}{10}\right) = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z \leq 1) \\ &= 1 - 0.8413 = 0.1587 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Y \geq 93.6) &= P\left(Z \geq \frac{93.6 - 83.6}{10}\right) = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z \leq 1) \\ &= 1 - 0.8413 = 0.1587 \end{aligned}$$

La probabilidad de ambos sucesos es la misma.