Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Justifique las respuestas usando lenguaje matemático y/o no matemático, según corresponda. Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos obtenidos entre 4.

Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos que puedan transmitir o almacenar información.

P1. — Una empresa está considerando la fabricación de tres tipos de armarios diferentes, A, B y C. Dispone de metal y madera.

- Para fabricar cada unidad del modelo A, se requieren 5 kg de metal y 5 horas de trabajo de un operario (no se requiere madera).
- Por unidad del modelo B, 10 kg de metal, 10 kg de madera y 10 horas de trabajo.
- Por unidad del modelo C, 15 kg de metal y 5 horas de trabajo (no se requiere madera).

a) Si queremos producir 10 unidades de cada tipo, ¿cuántos kg de cada material necesitamos? **(2 pt)**

b) Si disponemos de 1550 kg de metal, 600 kg de madera y 1050 horas de trabajo de operarios, ¿cuántas unidades de cada tipo tenemos que fabricar para utilizar completamente todos los recursos? **(4 pt)**

c) Supón ahora que disponemos de 1550 kg de metal, toda la madera que necesitemos (sin límite) y 1050 horas de trabajo, pero por limitaciones del almacén solo podemos producir 125 unidades en total. En este caso, ¿podemos utilizar completamente el metal, las horas y el almacén? **(4 pt)**

P2. — Un cliente nos pide ayuda para invertir un máximo de 10 000 € en dos productos de inversión diferentes: acciones y bonos. El cliente quiere invertir al menos la misma cantidad en acciones que en bonos. Además, el cliente quiere invertir entre 2 000 € y 8 000 € en bonos; y entre 4 000 € y 6 000 € en acciones.
El interés previsto para las acciones es de un 6% anual, y para los bonos es de un 2% anual.

a) Plantea la maximización del interés previsto por las inversions como un problema de programación lineal. **(3 pt)**

b) Dibuja la región factible, indicando las rectas y vértices que la delimitan. **(5 pt)**

c) ¿Cuál tendría que ser la inversión de cada tipo de producto para maximizar el interés anual previsto? ¿Cuánto dinero se generaría con esta inversión? **(2 pt)**

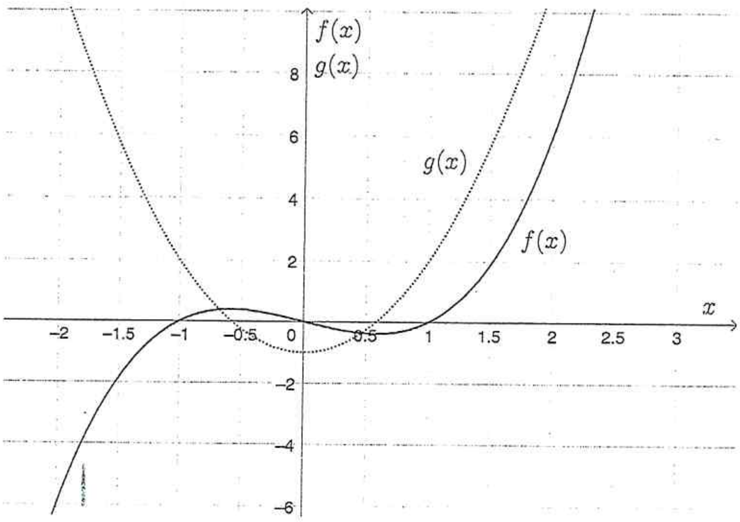
P3. — Considera la función $f(x) = \sqrt{x}$.

a) Haz un gráfico esquemático de la función $f(x)$, indicando el dominio, el comportamiento en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales.

Indicación: para el apartado b), el eje horizontal debería de llegar hasta $x = 30$. **(7 pt)**

b) Traza, sobre la gràfica, la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = 25$ e indica su pendiente. **(3 pt)**

P4. — Considera dos funciones, $f(x)$ y $g(x)$, que están representadas en la gráfica siguiente:



a) Sabemos que una de las funciones es $x(x-1)(x+1)$ y que la otra es $(x-1/\sqrt{3})(x+1/\sqrt{3})$, pero no sabemos cuál es cuál. Deduce, en base a la gráfica, cuál es $f(x)$ y cuál es $g(x)$. Justifica la respuesta. **(3 pt)**

b) Sabemos que una de ellas es la derivada de la otra. Di cuál es cuál: ¿es $f(x) = g'(x)$? ¿o bien es $g(x) = f'(x)$? **(3 pt)**

c) Calcula el área entre la función $g(x)$ y el eje de abscisas, que se encuentra comprendida entre los puntos en que $g(x) = 0$. **(4 pt)**

P5. — Según un modelo, la población de una ciudad determinada, p (en millones de habitantes), depende del tiempo que ha pasado, t (en años), desde el inicio del año 2000, según la relación

$$p(t) = \frac{4}{1+3\cdot e^{-0.2t}}, \quad \text{para } t \geq 0.$$

Te proporcionamos la siguiente información, que puedes utilizar si así lo consideras:

$$p'(t) = \frac{2.4\cdot e^{-0.2t}}{(1+3\cdot e^{-0.2t})^2}, \qquad \int p(t)\,\mathrm{d}t = 20\cdot\ln\left(e^{0.2t}+3\right)+C, \text{ para cualquier constante } C\in\mathbb{R}.$$

a) ¿Qué población teníamos al inicio del año 2000 (es decir, para $t = 0$)? ¿Qué año tuvimos exactamente 2 millones de habitantes? **(3 pt)**

b) ¿En qué intervalos la población aumenta? ¿En cuáles disminuye? **(3 pt)**

c) ¿A qué tiende la población de la ciudad a largo plazo? ¿A qué tiende el ritmo de crecimiento de la población a largo plazo? **(4 pt)**

P6. — En una población,

- el 50% de habitantes con mayor poder adquisitivo tienen una probabilidad de vivir de alquiler de un 10%, y
- el 50% de habitantes con menor poder adquisitivo tienen una probabilidad de vivir de alquiler de un 40%.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, escogiendo un habitante al azar, este viva de alquiler? **(4 pt)**

b) ¿Cuál es la probabilidad de que, escogiendo de manera independiente tres habitantes al azar, los tres vivan de alquiler? **(3 pt)**

c) ¿Cuál es la probabilidad de que, escogiendo de manera independiente tres habitantes al azar, al menos uno de los tres viva de alquiler? **(3 pt)**

P7. — La probabilidad de que llueva un dia cualquiera es siempre la misma. Ahora bien, si un dia cualquiera ha llovido, la probabilidad de que llueva al día siguiente es del 40%; y si un día cualquiera no ha llovido, la probabilidad de que llueva al día siguiente es del 5%.
Considera los sucesos siguientes:

- A: Hoy ha llovido.
- B: Mañana lloverá.

a) Calcula $P(A)$ y $P(B)$. **(5 pt)**

b) ¿Qué es más probable: que llueva mañana si sabemos que ha llovido hoy; o bien que llueva hoy si sabemos que mañana seguro que lloverá? **(5 pt)**

P8. — Según el Instituto Nacional de Estadística (INE), la esperanza de vida de una persona nacida en el 2020 es de 79.6 años para los hombres y de 83.6 años para las mujeres. Supongamos también que el número de años que vivirá una persona nacida en el 2020 tiene una desviación típica de $\sigma = 10$ años tanto para los hombres como para las mujeres.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un hombre nacido en el 2020 viva más de 60 años? ¿Y de que viva entre 60 y 70 años? **(6 pt)**

b) ¿Qué es más probable: que un hombre nacido en el 2020 viva más de 89.6 años; o que una mujer nacida en el 2020 viva más de 93.6 años? **(4 pt)**