MATEMATICAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

# EVAU JULIO 2024

## - Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

# Julio 2024 (Extraordinario)

**Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)**

*Tienes un pequeño negocio de pantalones y camisas. El precio de cada pantalón es de 60 €, y el precio de cada camisa es de 40 €.*

*a) (5 puntos) Esta semana se han vendido un total de 100 unidades entre pantalones y camisas, y hemos tenido unos ingresos totales de 5400 €. ¿Cuántos pantalones y cuántas camisas hemos vendido?*

*b) (5 puntos) Hace tres semanas se vendieron un total de 110 unidades entre pantalones y camisas, y un empleado que revisó la caja dijo que los ingresos totales eran de 4200 €, pero tú no te crees al empleado. ¿Cuántos pantalones y cuántas camisas se tendrían que haber vendido según lo que dice el empleado? Interpreta el resultado obtenido.*

*(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Julio 2024)*

**Solución.**

a) Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{“Nº de pantalones vendidos”}$$
$$y \equiv \text{“Nº de camisas vendidas”}$$

Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} x+y=100 \\ 60x+40y=5400 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y=100 \\ 3x+2y=270 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por el métod de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 100 \\ 3 & 2 & 270 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2-3F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 100 \\ 0 & -1 & -30 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x+30=100 \\ \Rightarrow -y=-30 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=70 \\ y=30 \end{array}}$$

b) Planteamos el nuevo problema con los datos del dependiente:

$$\begin{cases} x+y=110 \\ 60x+40y=4200 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y=110 \\ 3x+2y=210 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por el métod de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 110 \\ 3 & 2 & 210 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2-3F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 110 \\ 0 & -1 & -120 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x+120=100 \\ \Rightarrow -y=-120 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=-20 \\ y=120 \end{array}}$$

Los datos proporcionados por el dependiente no son creíbles pues conducen a un número de pantalones vendidos negativo.

**Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)**

*Considera las matrices siguientes:*

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} x & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \quad \& \quad C = \begin{pmatrix} y & z \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

*a) (3 puntos) Sabemos que existe un valor $x$ tal que $B$ es la inversa de $A$. ¿Cuál es este valor $x$?*

*b) (4 puntos) Para el valor $x$ del apartado anterior, calcula*

$$(A+I)\cdot(B-I)+(A-I)\cdot(B+I)$$

*c) (3 puntos) ¿Existen algunos valores para $y$, $z$ de manera que $C$ sea la inversa de $A$?*

*(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Julio 2024)*

**Solución.**

a) Si $B = A^{-1} \Rightarrow A \cdot B = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-15 & 0 \\ 5x-40 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2x - 15 = 1 \implies \boxed{x = 8} \\ 5x - 40 = 0 \implies x = 8 \checkmark \end{cases}$$

b) $(A+I)\cdot(B-I)+(A-I)\cdot(B+I) = AB - \cancel{A} + \cancel{B} - I + AB + \cancel{A} - \cancel{B} - I$

$= 2AB - 2I \overset{AB=I}{=} 2I - 2I = \mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $C = A^{-1} \Rightarrow A \cdot C = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & z \\ 7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y+21 & 2z-3 \\ 5y+56 & 5z-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2y + 21 = 1 \implies y = -10 \\ 5y + 56 = 0 \implies 5\cdot(-10) + 56 = 6 \neq 0 \end{cases} \Longrightarrow \nexists\ y,\, z \in \mathbb{R} \mid C = A^{-1}$$

**Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)**

*Una empresa produce dos tipos de productos: aspiradoras y baterías eléctricas.*

- *Para producir una aspiradora, necesitamos 5 h de operario y 4 kg de materias primas.*
- *Para producir una batería, necesitamos 1 h de operario y 1 kg de materias primas.*

*Cada aspiradora se vende por 100 € y cada batería por 22 €. Disponemos de un máximo de 110 horas de operarios y de 100 kg de materias primas. Supondremos que venderemos toda la producción.*

a) *(8 puntos) ¿Cuántas unidades de cada tipo tenemos que producir para maximizar los ingresos?*

b) *(2 puntos) Si el precio de venta de las aspiradoras va disminuyendo, habrá un momento en que será más rentable fabricar solo baterías. Calcula cuál es el precio de venta que tienen que tener las aspiradoras, de manera que el máximo beneficio total se obtiene cuando solo producimos baterías.*

*(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Julio 2024)*

**Solución.**

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de aspiradoras"
  $y \equiv$ "Nº de baterías eléctricas"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} (1)\ 5x + y \leq 110 & \rightarrow (0, 110) \quad \& \quad (22, 0) \\ (2)\ 4x + y \leq 100 & \rightarrow (0, 100) \quad \& \quad (25, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

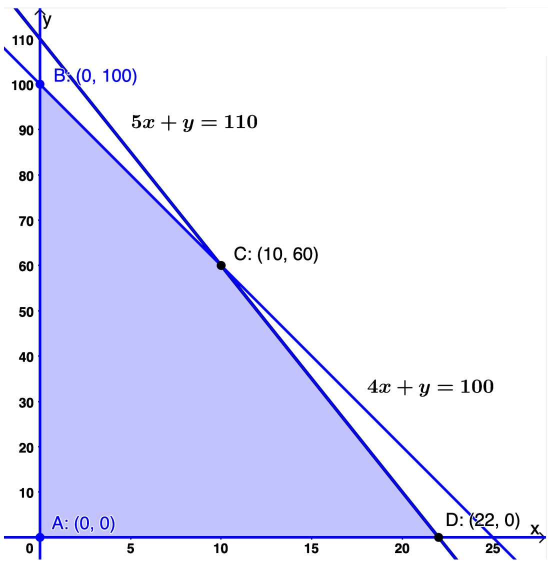


- `Función objetivo` $f(x, y) = 100x + 22y$ (euros)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

| Punto | $x$ | $y$ | $f(x, y)$ |
|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 0 |
| B | 0 | 100 | 2200 |
| C | 10 | 60 | 2320 |
| D | 22 | 0 | 2200 |




a) El *beneficio máximo* es de 2320 €, vendiendo 10 aspiradoras y 60 baterías eléctricas.

b) Si mantenemos las restricciones (región factible) y modificamos el precio de las aspiradoras a $k$ euros, la función objetivo quedaría:

$$f(x,y) = kx + 22y$$

Dado que el beneficio óptimo se produce en un vértice de la región factible, si queremos que dicho máximo se produzca en el vértice $B:(0,100)$, la pendiente de la función objetivo ha de ser mayor o igual que la de la restricción 2 $4x+y \leq 100$, es decir

$$m_f \geq -4 \implies -\frac{k}{22} \geq -4 \implies \boxed{k \leq 88}$$

en cuyo caso el beneficio máximo sería $f(0,100) = 22 \cdot 100 == 2200$ €.

---

**Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)**

*Considera la función $f(x) = e^x - e^{-x}$, para $x \geq 0$.*

*a) (3 puntos) Calcula el valor de la función en los extremos del dominio.*

*b) (4 puntos) Calcula $f'(x)$ y $f''(x)$.*

*c) (3 puntos) Calcula $\int_0^1 f(x)\,dx$.*

*(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Julio 2024)*



**Solución.**

a) $f(0) = e^0 - e^0 = 1 - 1 = 0 \quad \& \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x - e^{-x}\right) = \infty - 0 = +\infty$

b) $f'(x) = e^x + e^{-x} \quad \& \quad f''(x) = e^x - e^{-x} = f(x)$

c) $$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(e^x - e^{-x}\right) dx = e^x + e^{-x}\Big]_0^1 = \left(e + \frac{1}{e}\right) - (1+1)$$
$$= \frac{e^2 - 2e + 1}{e} \simeq 1.0862$$

---

**Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)**

*Según un estudio de mercado, la cantidad de gente que asistirá a un espectáculo, $g$ (en número de personas), en función del precio de la entrada, $p$ (en €), será la siguiente:*

$$g(p) = \begin{cases} 500 & , \text{ para } p = 0 \\ 300 - 3p & , \text{ para } 0 < p < 100 \\ 0 & , \text{ para } p = 100 \end{cases}$$

*a) (3 puntos) ¿Cuál es el dominio de $g(p)$? ¿Es esta función continua?*

*b) (2 puntos) Según el estudio de mercado, si asisten un total de 240 personas, ¿cuál habrá sido el precio de la entrada?*

*c) (5 puntos) Los ingresos son el producto del precio por la cantidad de gente que asistirá. Según el estudio, ¿qué precio maximiza los ingresos?*

*(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Julio 2024)*

**Solución.**

a)
- `Dominio:` $\text{Dom}(g) = [0, 100]$
- `Continuidad:`
  - Si $p \neq \{0, 100\}$, la función $g(p)$ es continua por ser un polinomio.
  - Si $p = 0$ $\quad g(0) = 500 \neq \lim\limits_{p \to 0^+} g(p) = 300 \implies$ no es continua en $p = 0$
  - Si $p = 100$ $\quad g(100) = 0 = \lim\limits_{p \to 0-} g(p) \implies$ continua en $p = 100$

  Luego la función $g(p)$ es continua en $(0, 100]$.

b) $g(p) = 240 \implies 300 - 3p = 240 \implies p = 20$ €

c) $I(p) = g(p) \cdot p = (300 - 3p) \cdot p = 300p - 3p^2$ con $p \in (0, 100)$

$I'(p) = 300 - 6p = 0 \implies p = 50$

$I''(p) = -6 \implies I''(50) = -6 < 0 \xRightarrow{(\cap)}$ Máximo en $p = 50$

Por lo tanto el ingreso máximo se produce con un precio de la entrada de 50 €, y ascienden a $I(50) = 7500$ €

**Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)**

*Un estudio de mercado indica que unos clientes determinados tienen un 7 % de probabilidades de comprar un producto $A$ , y un 10 % de probabilidades de comprar un producto $B$.*

*a) (5 puntos) Si la probabilidad de "comprar $A$ y no comparar $B$" es de un 6 %, ¿son los sucesos "comprar $A$" y "comparar $B$" independientes?*

*b) (5 puntos) Si los sucesos "comprar $A$" y "comprar $B$" fuesen independientes, ¿qué sería mayor: la probabilidad de "no comprar $A$"; o la probabilidad de "no comprar $A$, sabiendo que se ha comprado $B$"?*

*(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Julio 2024)*

**Solución.**

Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{“El cliente compra el producto } A\text{”}$$
$$B \equiv \text{“El cliente compra el producto } B\text{”}$$

Del enunciado tenemos:

$$P(A) = 0.07 \qquad \& \qquad P(B) = 0.1$$

a) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.07 - P(A \cap B) = 0.06 \implies P(A \cap B) = 0.01$

$P(A) \cdot P(B) = 0.07 \cdot 0.1 = 0.007 \neq 0.01 \implies$ los sucesos $A$ y $B$ no son independientes

b) Dado que $A$ y $B$ son independientes $P(\overline{A}) = P(\overline{A} \mid B)$. Vamos a comprobarlo:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.07 \cdot 0.1 = 0.007$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.07 = 0.93$

$$P(\overline{A} \mid B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.1 - 0.007}{0.1} = 0.93$$

## Ejercicio 7 (2.5 *puntos*)

*Según los datos del Instituto Nacional de Estadístitca (INE) a 1 de enero de 2023, en las Islas Baleares había 1210000 habitantes en total. Además, el número de hogares, en función del número de habitantes que convivían en el mismo, eran los siguientes:*

| | Número de convivientes | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 o más |
| Número de hogares | 118 000 | 124 000 | 93 000 | 119 000 |

a) *(2 puntos) ¿Cuál es el número medio de convivientes por hogar?*

b) *(2 puntos) ¿Cuántos habitantes pertenecen a un hogar en el que hay 4 o más convivientes? ¿Cuál es el número medio de convivientes en los hogares en los que hay 4 o más convivientes?*

c) *(3 puntos) Escogiendo un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que viva en un hogar unipersonal? Justifica tu respuesta.*

d) *(3 puntos) Escogiendo, de manera independiente, dos habitantes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que alguno de ellos viva en un hogar unipersonal? Justifica tu respuesta.*

*(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Julio 2024)*



**Solución.**

a) El número de convivientes medio por hogar será:

$$\frac{1210000}{118000 + 124000 + 93000 + 119000} = 2.665 \text{ convivientes}$$

b) Calculamos el número de personas que viven en hogares de 4 o más convivientes:

$$1210000 - (118000 \cdot 1 + 124000 \cdot 2 + 93000 \cdot 3) = 565000$$

Y el número medio de convivientes en hogares con 4 o más convivientes será: $\dfrac{565000}{119000} = 4.7478$

c) $P(\text{unipersonal}) = \dfrac{1 \cdot 118000}{1210000} = \dfrac{59}{605} = 0.0975$

d) $X$ : "Nº de personas que viven en un hogar unipersonal" $\longrightarrow X : \mathcal{B}(2, 0.0975)$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{2}{0} \cdot 0.0975^0 \cdot 0.9025^2 = 0.1855$$

**Ejercicio 8 (2.5 *puntos*)**

*Una empresa que fabrica componentes electrónicos realiza un estudio sobre la vida útil de sus productos. Con una muestra aleatoria de 50 componentes electrónicos, el tiempo medio de vida útil es de 507 horas. Supongamos que el tiempo de vida útil sigue una distribución normal y que su desviación típica es conocida e igual a 150 horas.*

*a) (5 puntos) Calcula un intervalo de confianza para la media poblacional de la vida útil de los componentes con un nivel de confianza del 75 %.*

*b) (5 puntos) Suponiendo ahora que la media poblacional es de $\mu = 500$ horas, ¿cuántas horas de vida útil tienen el 10 % de los productos que menos vida útil tienen?*

*(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Julio 2024)*

**Solución.**

$$X \equiv \text{“Tiempo de vida útil del componente electrónico (h)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 150)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 150) \xrightarrow{n=50} \overline{x} = 507 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.75$

$$1-\alpha = 0.75 \implies \alpha = 0.25 \implies \alpha/2 = 0.125 \implies 1-\alpha/2 = 0.875 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.15$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.15 \cdot \frac{150}{\sqrt{50}} = 24.4$$

$$I.C._{75\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{75\,\%}(\mu) = (482.6; 531.4)}$$

b) $X : \mathcal{N}(500, 150)$

$$P(X \leq a) = P\left(Z \leq \frac{a-500}{150}\right) = P\left(Z \geq \frac{-a+500}{150}\right)$$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{-a+500}{150}\right) = 0.1 \implies P\left(Z \leq \frac{-a+500}{150}\right) = 0.9$$

$$\xRightarrow{Tabla} \frac{-a+500}{150} = 1.28 \implies \boxed{a = 308 \text{ horas}}$$