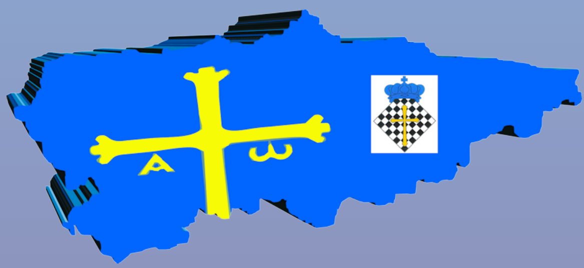
MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS



EVAU JULIO 2024
- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Julio 2024 (Extraordinario)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Una fábrica produce tazas, platos y teteras de ceramica. Por cada uno de estos productos se utiliza una cantidad fija de material, que se introduce en la máquina de la cual sale la pieza preparada para el embalaje. En cada taza la máquina utiliza 5 minutos, 4 en cada plato y 8 en cada tetera. El coste del material utilizado es de 3 € cada taza, 4 € cada plato y 3 € cada tetera. Se hace un estudio de la producción durante 50 minutos y se calcula que el coste es de 26 €.

a) *(0.75 puntos) Plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice el problema y escríbelo matricialmente.*

b) *(1 punto) Suponiendo que en estos 50 minutos se fabricaron en total exactamente 8 piezas, calcula, si es posible, cuántas unidades se produjeron de cada tipo.*

c) *(0.75 puntos) Si se consigue rebajar el tiempo de elaboración de cada tetera de 8 a 5 minutos, ¿sería posible fabricar exactamente 10 piezas?*

(Asturias - Matemáticas II - Julio 2024)

Solución.

a) Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{“Nº de tazas producidas”}$$
$$y \equiv \text{“Nº de platos producidas”}$$
$$z \equiv \text{“Nº de teteras producidas”}$$

Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} 5x+4y+8z=50 \\ 3x+4y+3z=26 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 26 \end{pmatrix}$$

b) Añadimos la nueva información

$$\begin{cases} x+y+z=8 \\ 5x+4y+8z=50 \\ 3x+4y+3z=26 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones por el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 5 & 4 & 8 & 50 \\ 3 & 4 & 3 & 26 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2-5F_1 \\ F_3-3F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ F_3+F_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x+2+4=8 \\ \Rightarrow -y+3\cdot 4=10 \\ \Rightarrow 3z=12 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=2 \\ y=2 \\ z=4 \end{array}}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

c) Con los nuevos requisitos de producción las ecuaciones quedan:

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ 5x + 4y + 5z = 50 \\ 3x + 4y + 3z = 26 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones por el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 5 & 4 & 5 & 50 \\ 3 & 4 & 3 & 26 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 5F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 + F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

El sistema no tiene solución, por lo que no sería posible fabricar 10 piezas en 50 minutos si el tiempo de fabricación de las teteras se reduce de 8 a 5 minutos cada unidad.

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Sea $x \in \mathbb{R}$ y las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) (0.75 puntos) Decide de forma razonada si se pueden realizar las operaciones siguientes $C \cdot A \cdot B$ y $B \cdot A \cdot C$. ¿Cuál sería la dimensión de la matriz resultante si pudiese realizarse?

b) (1.75 puntos) Calcula según los valores de x el rango de A. Para $x = 0$, comprueba que existe A^{-1} y calcúlala.

(Asturias - Matemáticas II - Julio 2024)

Solución.

a) $\underbrace{C}_{3\times 1} \cdot \underbrace{A}_{3\times 3} \cdot \underbrace{B}_{1\times 3} \Longrightarrow$ No se puede efectuar la operación

$\underbrace{\underbrace{B}_{1\times 3} \cdot \underbrace{A}_{3\times 3}}_{1\times 3} \cdot \underbrace{C}_{3\times 1} = \underbrace{M}_{1\times 1} \Longrightarrow M \in \mathcal{M}_{1\times 1}$

b) $|A| = -2 \cdot (-x - 6) = 2x + 12 = 0 \Longrightarrow x = -6$

- Si $x \neq -6 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 3$
- Si $x = -6 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \text{ran}(A) < 3$, y como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 2$

Para $x = 0 \Longrightarrow |A| = 0 + 12 = 12 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} \quad \& \quad \text{Adj}\, A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & -6 & 4 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}\, A^{\top} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 6 & -6 & -6 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

> *Se consideera la función* $f(x) = \dfrac{x^2-4}{1-x}$.
>
> a) *(1 punto) Calcula el dominio de la función f y sus asíntotas.*
>
> b) *(1 punto) Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y los puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.*
>
> c) *(0.5 puntos) Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f.*
>
> *(Asturias - Matemáticas II - Julio 2024)*

Solución.

a)
- `Dominio:` $1-x=0 \implies x=1 \implies \mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{1\}$
- `A. Verical:` $\exists$ A.V. en $x=1$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-4}{1-x} = \left[\frac{-3}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \dfrac{-3}{0^+} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \dfrac{-3}{0^-} = +\infty \end{cases}$$

- `A. Horizontal:` $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-4}{1-x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \mp\infty \implies \nexists$ A.H.
- `A. Oblícua:` $\exists$ A.O. en $y=-x-1$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-4}{x-x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{-1} = -1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx] = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-4}{1-x}+x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x^2}-4+x-\cancel{x^2}}{1-x}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-4}{1-x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{-1} = -1$$

b)
- `Monotonía:`

$f'(x) = \dfrac{2x\cdot(1-x)+(x^2-4)}{(1-x)^2} = \dfrac{-x^2+2x-4}{(1-x)^2} < 0\ \forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$, luego $f(x)$ es decreciente en $\mathrm{Dom}(f)$ y no hay extremos relativos.

- `Curvatura:`

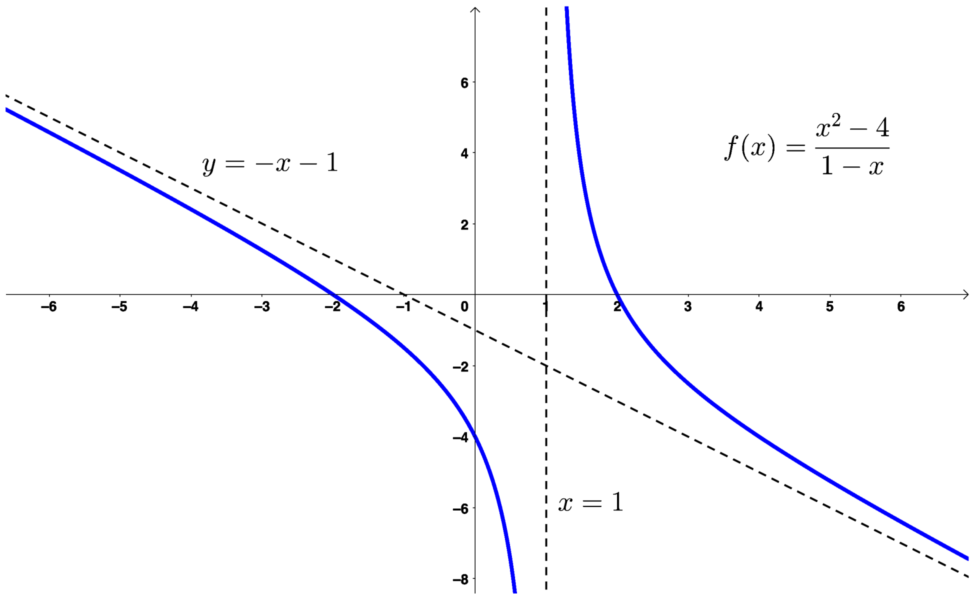
$f''(x) = \dfrac{(-2x+2)\cdot(1-x)^{\cancel{2}} + (-x^2+2x-4)\cdot 2\cdot\cancel{(1-x)}}{(1-x)^{\cancel{4}\,3}} = \dfrac{-6}{(1-x)^3} \neq 0$, luego la función $f(x)$ no tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty,1)$	$(1,+\infty)$
Signo $f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Cóncava $\cap$	Convexa $\cup$

La función $f(x)$ es *cóncava* ($\cap$) en $(-\infty,1)$ y *convexa* ($\cup$) en $(1,+\infty)$, y no tiene *puntos de inflexión*.

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

c) Hacemos un esbozo de la gráfica de la función



Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Dada la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi - 2x)$.

a) *(1.25 puntos) Calcula una primitiva que pase por el punto* $(\pi/2, 1)$.

b) *(1.25 puntos) Calcula el área limitada por* f*, el eje* X *y las rectas* $x = -\pi/4$ *y* $x = \pi/4$.

(Asturias - Matemáticas II - Julio 2024)

Solución.

a) $$F(x) = \int f(x)\,dx = \int \operatorname{sen}(\pi - 2x)\,dx = \frac{1}{-2}\int \underbrace{-2}_{u'} \cdot \underbrace{\operatorname{sen}(\pi - 2x)}_{\operatorname{sen} u}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cos(\pi - 2x) + C \implies F(\pi/2) = 1 \implies \frac{1}{2}\overset{1}{\cancel{\cos(0)}} + C = 1 \implies C = \frac{1}{2}$$

$$\implies \boxed{F(x) = \frac{1}{2}\cos(\pi - 2x) + \frac{1}{2}}$$

b) Hallamos los puntos de corte de $f(x)$ con el eje OX entre las rectas $x = -\pi/4$ y $x = \pi/4 \implies \operatorname{sen}(\pi - 2x) = 0 \implies x = 0$, que entre las citadas rectas define dos recintos de integración $A_1 : (-\pi/4, 0)$ y $A_2 : (0, \pi/4)$.

$$A_1 = \int_{-\pi/4}^{0} f(x)\,dx = F(0) - F(-\pi/4) = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$A_2 = \int_{0}^{\pi/4} f(x)\,dx = F(\pi/4) - F(0) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Área} = |A_1| + |A_2| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\ u^2$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)

Se consideran los puntos $A(0,-1,1)$ y $B(2,1,3)$ de $\mathbb{R}^3$.

a) (1.25 puntos) Encuentra la ecuación del plano π que cumple que los dos puntos son simétricos respecto a él.

b) (1.25 puntos) Encuentra la ecuación continua de la recta r perpendicular al plano $\pi' \equiv x+y+z=3$ y que contiene al punto $Q(1,0,1)$.

(Asturias - Matemáticas II - Julio 2024)

Solución.

a) El plano pedido es el plano mediador de los puntos A y B.

$$\pi \equiv \begin{cases} M_{\overline{AB}} = \dfrac{A+B}{2} = (1,0,2) \\ \vec{n}_\pi = \overrightarrow{AB} = (2,2,2) \approx (1,1,1) \end{cases} \Longrightarrow x+y+z+D=0 \xrightarrow{M\in\pi} 1+0+2+D=0$$

$$\Longrightarrow D=-3 \Longrightarrow \boxed{\pi \equiv x+y+z-3=0}$$

b) $$r \equiv \begin{cases} Q(1,0,1) \\ \vec{d}_r = \vec{n}_{\pi'} = (1,1,1) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1} \Longrightarrow \boxed{r \equiv x-1=y=z-1}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)

> *Se consideran los puntos* $A(1,1,1)$, $B(1,0,2)$, $C(-1,1,3)$ *y* $D(-1,0,1)$.
>
> *a) (0.75 puntos) Estudia si existe un plano que contenga a los cuatro puntos.*
>
> *b) (0.75 puntos) Calcula la recta* r *que pasa por* D *y es perpendicular al plano* π *que contiene a* A*,* B *y* C*.*
>
> *c) (1 punto) Calcula el punto* P *intersección de* r *y* π *del apartado anterior.*
>
> *(Asturias - Matemáticas II - Julio 2024)*

Solución.

a) $\overrightarrow{AB} = (0,-1,1) \quad \& \quad \overrightarrow{AC} = (-2,0,2) \quad \& \quad \overrightarrow{AD} = (-2,-1,0)$

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \implies \text{los cuatro puntos no son coplanarios.}$$

b) $$\pi \equiv \begin{cases} A(1,1,1) \\ \vec{n}_\pi = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-2,-2,-2) \approx (1,-1,1) \end{cases}$$

$$\implies \pi \equiv x - y + z + D = 0 \xrightarrow{A \in \pi} 1 + 1 + 1 + D = 0 \xrightarrow{D=-3} \pi \equiv x - y + z - 3 = 0$$

$$r \equiv \begin{cases} D(-1,0,1) \\ \vec{d}_r = \vec{n}_\pi = (1,1,1) \end{cases} \implies \boxed{r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} , \ \lambda \in \mathbb{R}}$$

c) $P = r \cap \pi \implies (-1+\lambda) + \lambda + (1+\lambda) - 3 = 0 \xrightarrow{\lambda=1} \boxed{P(0,1,2)}$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 7 (2.5 *puntos*)

En un instituto el 55 % *de los estudiantes del curso* 2023−2024 *hacen el Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Teconlogía. El* 30 % *de los estudiantes que cursan el Bachillerato de Ciencias y Tecnología cursan como optativa la asignatura "Proyecto de Investigación Integrado" y de los que no hacen este Bachillerato, el* 40 % *cursan esta asignatura como optativa.*

a) (1.25 puntos) Tomado un estudiante al azar del total de mattriculados en Bachillerato, ¿cuál es la probabilidad de que curse la asignatura "Proyecto de Investigación Integrado"?

b) (1.25 puntos) Si un estudiante elegido al azar no cursa la asignatura "Proyecto de Investigación Integrado", ¿cuál es la probabilidad de que curse el Bachillerato de Ciencias y Tecnología?

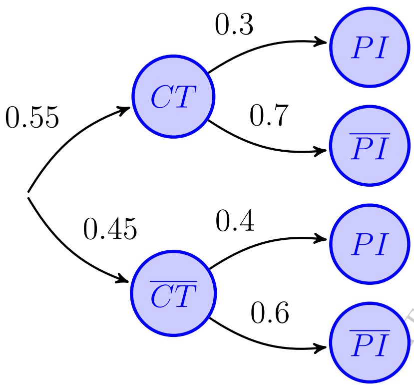
(Asturias - Matemáticas II - Julio 2024)

Solución.

Sean los sucesos:

$CT \equiv$ "El estudiante hace el Bachillerato de Ciencias y Tecnología"

$PI \equiv$ "El estudiante cursa la asignatura Proyecto de Investigación Integrado"



a) $$\begin{aligned} P(PI) &= P\Big((CT \cap PI) \cup (\overline{CT} \cap PI)\Big) \\ &= P(CT \cap PI) + P(\overline{CT} \cap PI) \\ &= P(CT) \cdot P(PI \mid CT) + P(\overline{CT}) \cdot P(PI \mid \overline{CT}) \\ &= 0.55 \cdot 0.3 + 0.45 \cdot 0.4 = 0.345 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(CT \mid \overline{PI}) &= \frac{P(CT \cap \overline{PI})}{P(\overline{PI})} = \frac{P(CT) \cdot P(\overline{PI} \mid CT)}{1 - P(PI)} \\ &= \frac{0.55 \cdot 0.7}{1 - 0.345} = 0.5878 \end{aligned}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 8 (2.5 *puntos*)

En una comunidad autónoma se estudia la cantidad media de basura que se genera por habitante durante dos meses. Se observa que sigue una distribución normal de media 85 *Kg y desviación tíica* 15 *Kg.*

a) (0.75 puntos) ¿Qué porcentaje de población genera más de 90 *Kg cada dos meses?*

b) (0.75 puntos) Si se toma una muestra de 10000 *habitantes, ¿cuántos generan menos de* 90 *Kg de basura?*

c) (1 punto) Se hace una campaña de concienciación y se observa que de las 10000 *personas de la muestra,* 5596 *generan menos de* 70 *Kg de basura. Suponiendo que se mantiene la desviación típica, ¿cuál es la nueva media? ¿Ha funcionado la campaña?*

Nota: *Algunos valores de la función de distribución* $\mathcal{N}(0,1)$ *son:* $F(x) = P(Z \leq x)$
$F(0.15) = 0.5596$ $F(0.3333) = 0.6294$ $F(0.385) = 0.65$ $F(0.5596) = 0.7112$
$F(0.6294) = 0.7356$ $F(0.8159) = 0.7939$ $F(0.9) = 0.8159$ $F(1.28) = 0.9$

(Asturias - Matemáticas II - Julio 2024)

Solución.

$$X \equiv \text{“Basura generada por habitante (Kg)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(85, 15)$$

a) $P(X \geq 90) = P\left(Z \geq \dfrac{90-85}{15}\right) = P(Z \geq 0.3333) = 1 - P(Z \leq 0.3333)$
$= 1 - 0.6294 = 0.3706 \Longrightarrow 37.06\,\%$

b) $N = 10000 \cdot P(Z \leq 90) = 10000 \cdot \left[1 - P(Z \geq 90)\right] = 10000 \cdot (1 - 0.3706)$
$= 10000 \cdot 0.6294 = 6294$ habitantes

c) $P(X \leq 70) = \dfrac{5596}{10000} = 0.5596$

$P(X \leq 70) = P\left(Z \leq \dfrac{70-\mu}{15}\right) = 0.5596 \Longrightarrow \dfrac{70-\mu}{15} = 0.15 \Longrightarrow \boxed{\mu = 67.75 \text{ Kg}}$

La producción media de basura por habitante ha descendido notablemente por lo que la campaña realizada ha funcionado.

HTTPS://APRENDECONMIMOMELON.COM