MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU MODELO 2025

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Modelo 2025

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

HidroBio es una marca de un preparado en polvo para elaborar suero bebible que se utiliza para rehidratar a pacientes con gastroenteritis. El suero se prepara disolviendo un sobre de HidroBio en 1 *litro de agua. La marca comercializa tres tipos de sobres, de sabor, a naranja, fresa o limón. El contenido de cada sobre reacciona químicamente con el agua produciéndose en esa reacción, un determinado principio activo, en cantidad variable, en función del tiempo, de manera que la tasa de variación instantánea de la cantidad de principio activo, medida en mg/hora, viene dada por la función*

$$c(t) = \frac{3}{2} \cdot \left(t - \frac{t^2}{2}\right)$$

siendo t el tiempo transcurrido, en horas, desde la elaboración del preparado hasta pasadas tres horas. La cantidad de principio activo presente en la disolución potencia además el sabor del preparado, de forma que a más cantidad de principio más intenso es el sabor.

a) (1 punto) Indique la cantidad de principio activo al cabo de 60 *minutos de haber sido preparado el suero.*

b) (0.75 puntos) ¿Va aumentando la cantidad de principio activo a lo largo de las 3 *primeras horas? ¿Por qué?*

c) (0.75 puntos) Se ha observado que para conseguir que los menores de 5 *años ingieran el suero más fácilmente, lo mejor es disolver un sobre con sabor a fresa y darles el primer vaso en el momento en que el sabor de la disolución sea más intenso. ¿Cuándo le daría el primer vaso de suero a una niña de* 4 *años? Determine cuál será la cantidad de principio activo en el litro de suero en ese momento.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2025)

Solución.

a) Si la tasa de variación instantánea de la cantidad de principio activo es $c(t)$, la función que expresa la cantidad de principio activo será su integral $C(t)$, teniendo en cuenta que al principio la cantidad de principio activo es nula, esto es, que $C(0) = 0$, tenemos:

$$C(t) = \int c(t)\,dt = \int \frac{3}{2} \cdot \left(t - \frac{t^2}{2}\right) dt = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6}\right) + C = \frac{1}{4} \cdot \left(3t^2 - t^3\right) + C$$

$$C(0) = 0 \implies C = 0 \implies C(t) = \frac{1}{4} \cdot \left(3t^2 - t^3\right)$$

$$\text{Tras 60 minutos} \implies C(1) = \frac{1}{4} \cdot (3 - 1) = 0.5\ mg/l$$

b) $c(t) = C'(t) = \dfrac{3}{2} \cdot \left(t - \dfrac{t^2}{2}\right) = 0 \implies 2t - t^2 = 0 \implies t = \{0, 2\}$

	$(0,2)$	$(2,3)$
Signo $c(t)$	$+$	-
$C(t)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

El contenido de principio activo $C(t)$ es creciente en $(0,2)$ y decreciente en $(2,3)$. Por lo tanto solo crecerá en las dos primeras horas.

c) El contenido de principio activo tiene un máximo de 1 mg/l en $t=2$ horas, momento en el que debería suministrarse el primer vaso a la niña.

Ejercicio 2A (2.5 *puntos*)

Se consideran las matrices A y B dadas por:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & -100 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1.25 puntos) Calcule la matriz D tal que $B\cdot\left(D^\top + A^{-1}\right)\cdot B^{-1}=2I$, donde I es la matriz identidad de tamaño 2×2.

b) (1.25 puntos) La matriz A verifica la igualdad $A^2=A+2I$. Calcule A^4

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2025 - Opción A)

Solución.

a) $B\cdot\left(D^\top + A^{-1}\right)\cdot B^{-1}=2I \implies \underbrace{B^{-1}\cdot B}_{I}\cdot\left(D^\top + A^{-1}\right)\cdot \underbrace{B^{-1}\cdot B}_{I} = B^{-1}\cdot 2I\cdot B$

$$\implies D^\top + A^{-1}=2I \implies D^\top = 2I - A^{-1} \implies \boxed{D=\left(2I-A^{-1}\right)^\top}$$

$$D=\left[2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\right]^\top = \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}-\frac{1}{-2}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right]^\top$$

$$=\begin{pmatrix} 3/2 & -3/2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^\top \implies \boxed{D=\begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ -3/2 & 3 \end{pmatrix}}$$

b) $A^4=A^2\cdot A^2=(A+2I)\cdot(A+2I)=A^2+2AI+2IA+(2I)^2=A^2+4A+4I$

$$=A+2I+4A+4I=5A+6I=5\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}+6\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 & 15 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2B (2.5 *puntos*)

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales, dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ ax + (-a+2)y = 2 \\ 2x - (a+3)y + (a+2)z = -5 \end{cases}$$

a) *(1.5 puntos) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.*

b) *(1 punto) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 1$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2025 - Opción B)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ a & -a+2 & 0 & 2 \\ 2 & -(a+3) & a+2 & -5 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -a^2 + a = a \cdot (1-a) = 0 \implies a = \{0, 1\}$$

- Si $a \neq \{0,1\}$ $|A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $a = 0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & -5 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -5 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA INCOMPATIBLE ($\nexists$ solución)

- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & -5 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & -5 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 1$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x - \lambda - 3 + 2\lambda = -1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2\lambda - z = 3 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{ll} x = 2 - \lambda & \\ y = \lambda & , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -3 + 2\lambda & \end{array}}$$

———— ∘ ————

Ejercicio 3A (2.5 *puntos*)

Una comunidad autónoma española quiere evaluar el nivel de compromiso con el reciclaje de sus ciudadanos. Para ello se realiza un estudio en dos municipios seleccionados al azar.

En el primer municipio, la proporción de personas comprometidas con el reciclaje es de $p = 0.7$. Se toma una muestra aleatoria simple de 600 personas de dicho municipio:

a) (1 punto) Determine el número esperado de personas en la muestra elegida que no estarán comprometidas con prácticas de reciclaje.

b) (1.5 puntos) Mediante la aproximación por una normal, calcule la probabilidad de que el número de personas comprometidas con el reciclaje esté entre 408 y 432, ambos inclusive.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2025 - Opción A)

Solución.

$$X : \text{“Proporción de personas comprometidas con el reciclaje”} \longrightarrow X : \mathcal{B}(600, 0.7)$$

a) $E[X] = np = 0.7 \cdot 600 = 420$ personas comprometidas con el reciclaje y por tanto $600 - 420 = 180$ personas no estarán comprometidas de media con el mismo.

b) $$X : \mathcal{B}(600, 0.7) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} n = 600 > 20 \checkmark \\ np = 420 > 5 \checkmark \\ nq = 180 > 5 \checkmark \end{array} \right\} \longrightarrow Y : \mathcal{N}(np, \sqrt{npq}) = \mathcal{N}(420, 11.225)$$

$$\begin{aligned} P(408 \leq X \leq 432) &= P(407.5 \leq Y \leq 432.5) = P\left(\frac{407.5 - 420}{11.225} \leq Z \leq \frac{432.5 - 420}{11.225}\right) \\ &= P(-1.11 \leq Z \leq 1.11) = P(Z \leq 1.11) - P(Z \leq -1.11) \\ &= P(Z \leq 1.11) - P(Z \geq 1.11) \\ &= P(Z \leq 1.11) - \big[1 - P(Z \leq 1.11)\big] = 2P(Z \leq 1.11) - 1 \\ &= 2 \cdot 0.8665 - 1 = 0.733 \end{aligned}$$

Ejercicio 3B (2.5 *puntos*)

Una comunidad autónoma española quiere evaluar el nivel de compromiso con el reciclaje de sus ciudadanos. Para ello se realiza un estudio en dos municipios seleccionados al azar.

En el segundo municipio:

a) (1.25 puntos) Se tomó una muestra aleatoria simple de 450 *personas de las cuales* 351 *se declaran comprometidas con prácticas de reciclaje. Obtenga un intervalo de confianza del* 90 % *para la proporción de personas del segundo municipio, comprometidas con prácticas de reciclaje.*

b) (1.25 puntos) Asumiendo que la proporción poblacional de los comprometidos con el reciclaje en este segundo municipio es $p = 0.8$*, determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de personas para garantizar, con un nivel de confianza del* 95 %*, que el margen de error en la estimación no supere el* 3 % (±3 %).

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2025 - Opción B)

Solución.

a) $n = 450 \quad \& \quad \hat{p} = \dfrac{351}{450} = 0.78 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.22 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.9$

$$1 - \alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies \alpha/2 = 0.05 \implies 1 - \alpha/2 = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 1.645 \cdot \sqrt{\frac{0.78 \cdot 0.22}{450}} = 0.0321$$

$$I.C._{90\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(p) = (0.7479; 0.8121)}$$

b) $n = ? \quad \& \quad p = 0.8 \implies q = 0.2 \quad \& \quad E < 0.03 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.95$

$$1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1 - \alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{n}} < 0.03 \implies n \geq \left(\frac{1.96}{0.03}\right)^2 \cdot 0.8 \cdot 0.2 = 682.95$$

$$\implies \boxed{n = 683}$$

Ejercicio 4A (2.5 *puntos*)

De dos sucesos A y B sabemos que:

$$P(A \cup B) = 1 \qquad \& \qquad P(B) = 0.8 \qquad \& \qquad P(\overline{A}) = 0.55$$

donde $\overline{A}$ es el suceso complementario de A.

a) *(1 punto) Calcule $P(A \mid B)$.*

b) *(1 punto) Calcule $P(\overline{B} \mid A)$, siendo $\overline{B}$ el suceso complementario de B.*

c) *(0.5 puntos) Calcule $P(\overline{A} \cap B)$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2025 - Opción A)

Solución.

a) $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0.55 = 0.45$

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.45 + 0.8 - 1 = 0.25$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.25}{0.8} \implies \boxed{P(A \mid B) = 0.3125}$$

b) $$P(\overline{B} \mid A) = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.45 - 0.25}{0.45} \Rightarrow \boxed{P(\overline{B} \mid A) = 0.4444}$$

c) $$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0.8 - 0.25 \implies \boxed{P(\overline{A} \cap B) = 0.55}$$

Ejercicio 4B (2.5 *puntos*)

En los premios Grammy Latino, se sabe que el 40 % de los artistas nominados en la categoría de Mejor Álbum del Año son dúos, el 30 % son grupos musicales (más de dos artistas) y el 30 % son solistas. Además, se ha observado que el 20 % de los dúos, el 15 % de los grupos musicales y el 25 % de los solistas nominados han ganado el premio de Mejor Álbum del Año. Eligiendo al azar un artista nominado al Mejor Álbum del Año, y sabiendo que en este concurso los artistas sólo pueden presentarse por una de las tres categorías musicales, calcule la probabilidad de que:

a) (1.25 puntos) Haya ganado el Grammy Latino en dicha categoría.

b) (1.25 puntos) Dicho artista sea solista, sabiendo que ha ganado el Grammy Latino en dicha categoría.

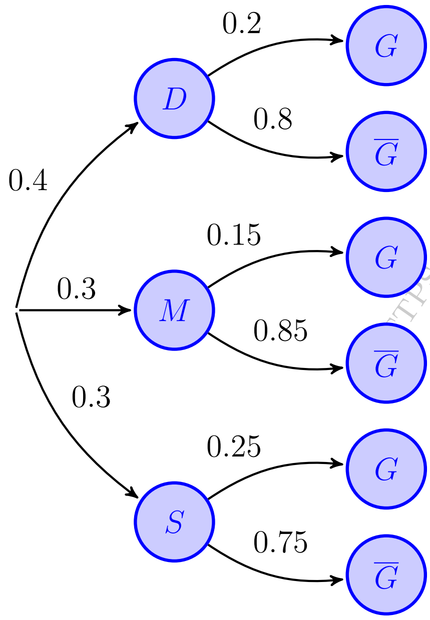
(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2025 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$D \equiv$ "Los nominados son dúos" $\quad M \equiv$ "Los nominados son grupos musicales"

$S \equiv$ "Los nominados son solistas" $\quad G \equiv$ "Los nominados han ganado el premio"



a) $P(G) = P\big((D \cap G) \cup (M \cap G) \cup (S \cap G)\big)$

$= P(D \cap G) + P(M \cap G) + P(S \cap G)$

$= P(D) \cdot P(G \mid D) + P(M) \cdot P(G \mid M)$

$+ P(S) \cdot P(G \mid S) = 0.4 \cdot 0.2$

$+ 0.3 \cdot 0.15 + 0.3 \cdot 0.25 = 0.2$

b) $P(S \mid G) = \dfrac{P(S \cap G)}{P(G)} = \dfrac{P(S) \cdot P(G \mid S)}{P(G)}$

$= \dfrac{0.3 \cdot 0.25}{0.2} = 0.375$