MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS

EVAU MODELO 2025

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Modelo 2025

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Halla dos números mayores o iguales que 0, cuya suma sea 1, y el producto de uno de ellos por la raíz cuadrada del otro sea máximo.

(Andalucía - Matemáticas II - Modelo 2025)

Solución.

Sean x e y los números buscados.

$$x + y = 1 \implies y = 1 - x$$
$$P(x, y) = x\sqrt{y} \implies P(x) = x \cdot \sqrt{1-x}$$
$$P'(x) = \sqrt{1-x} + x \cdot \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2 \cdot (1-x) - x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}} = 0 \implies x = {}^2/_3$$

	$(0, {}^2/_3)$	$({}^2/_3, +\infty)$
Signo $P'(x)$	$+$	-
$P(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

El producto $P(x)$ es *creciente* en $(0, {}^2/_3)$ y *decreciente* en $({}^2/_3, +\infty)$, y tiene un *máximo relativo* en $x = {}^2/_3 \implies y = 1 - x = {}^1/_3$, en cuyo caso el producto vale $P({}^2/_3) = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

Ejercicio 2A (2.5 *puntos*)

Considera el plano π, determinado por los puntos $A(-1,0,0)$, $B(0,1,1)$ y $C(2,1,0)$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x - 2z - 3 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

Halla los puntos de r cuya distancia a π es $\sqrt{14}$ unidades.

(Andalucía - Matemáticas II - Modelo 2025 - Opción A)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} R(3,2,0) \\ \vec{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (2,1,1) \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\pi \equiv \begin{cases} A(-1,0,0) \\ \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1,1,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (3,1,0) \end{cases} \implies \pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi \equiv x - 3y + 2z + 1 = 0$$

Sea el punto $P \in r \implies P(3+2\lambda, 2+\lambda, \lambda)$

$$d(P,\pi) = \frac{|3 + 2\lambda - 3\cdot(2+\lambda) + 2\lambda + 1|}{\sqrt{1+9+4}} = \frac{|\lambda - 2|}{\sqrt{14}} = \sqrt{14} \implies |\lambda - 2| = 14$$

$$\implies \begin{cases} \lambda - 2 = 14 \implies \lambda = 16 \implies \boxed{P_1(35,18,16)} \\ \lambda - 2 = -14 \implies \lambda = -12 \implies \boxed{P_2(-21,-10,-12)} \end{cases}$$

Ejercicio 2B (2.5 *puntos*)

Considera el paralelogramo cuyos vértices consecutivos son los puntos $P(-1,2,3)$, $Q(-2,1,0)$, $R(0,5,1)$ *y* S.

I) *(1 punto) Halla las coordenadas del punto* S.

II) *(1.5 puntos) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano que contiene a los puntos* P, Q *y* R.

(Andalucía - Matemáticas II - Modelo 2025 - Opción B)

Solución.

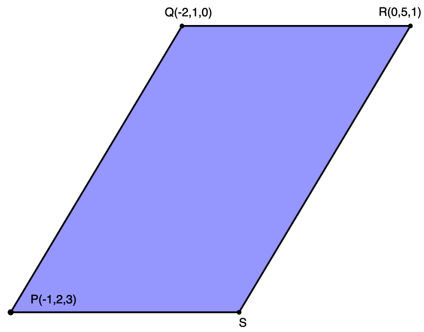
I) $\overrightarrow{QP} = (-1,2,3) - (-2,1,0) = (1,1,3)$

$\overrightarrow{QR} = (0,5,1) - (-2,1,0) = (2,4,1)$

$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{QR}$

$= (-1,2,3) + (2,4,1) = (1,6,4)$

$\Longrightarrow \boxed{S(1,6,4)}$



II) $$\pi \equiv \begin{cases} Q(-2,1,0) \\ \overrightarrow{QP} = (1,1,3) \\ \overrightarrow{QR} = (2,4,1) \end{cases} \Longrightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \pi \equiv 11x - 5y - 2z + 27 = 0$$

$$r \equiv \begin{cases} O(0,0,0) \\ \vec{d}_r = \vec{n}_\pi = (11,-5,-2) \end{cases} \Longrightarrow r \equiv \begin{cases} x = 11\lambda \\ y = -5\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} , \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 3A (2.5 *puntos*)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

i) *(0.75 puntos) Calcula* A^{10}.

ii) *(1.75 puntos) Calcula, si es posible, la matriz inversa de* $I + A + A^2$*, donde* I *denota la matriz identidad.*

(Andalucía - Matemáticas II - Modelo 2025 - Opción A)

Solución.

i) $$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{O}$$

$$A^{10} = A^3 \cdot A^7 = \mathcal{O} \cdot A^7 = \mathcal{O}$$

ii) $$I + A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & ab-b \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|I + A + A^2| = 1 \quad \& \quad \mathrm{Adj}(I + A + A^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ b & -b & 1 \end{pmatrix}$$

$$(I + A + A^2)^{-1} = \frac{1}{|I + A + A^2|} \cdot \mathrm{Adj}(I + A + A^2)^{\top} = \begin{pmatrix} 1 & -a & b \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3B (2.5 *puntos*)

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

se define la matriz $M = A + (\lambda - 1) \cdot B$.

I) *(1.5 puntos) Halla los valores de* λ *para los que la matriz* M *tiene rango menor que 3.*

II) *(1 punto) Para* $\lambda = -1$*, resuelve el sistema lineal homogéneo cuya matriz de coeficientes es* M*.*

(Andalucía - Matemáticas II - Modelo 2025 - Opción B)

Solución.

I) $M = A+(\lambda-1)\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + (\lambda-1)\cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda-1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda-1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = [C_1 = C_1 + C_2 + C_3] = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 & \lambda-1 \\ \lambda+1 & \lambda-1 & 1 \\ \lambda+1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda-1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = (\lambda+1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda-1 \\ 0 & \lambda-2 & -\lambda+2 \\ 0 & 0 & -\lambda+2 \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda+1)\cdot(\lambda-2)^2 = 0 \implies \lambda = \{-1, 2\} \implies \operatorname{ran}(M) < 3 \ \forall \lambda = \{-1, 2\}$$

II) Para $\lambda = -1$ el sistema $M \cdot X = \mathcal{O}$ es el siguiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ F_3 + F_2 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x + \lambda - 2\lambda = 0 \\ \Rightarrow -3y + 3\lambda = 0 \\ \Rightarrow z = \lambda \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \lambda \ , \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 4A (2.5 *puntos*)

Sabiendo que $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = e^{x^2}$ es una primitiva de f:

a) (1.25 puntos) Comprueba que f es creciente.

b) (1.25 puntos) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función f, el eje de abscisas y la recta $x = 1$.

(Andalucía - Matemáticas II - Modelo 2025 - Opción A)

Solución.

a) $F(x) = \int f(x)\,dx \implies f(x) = F'(x) = 2x \cdot e^{x^2}$

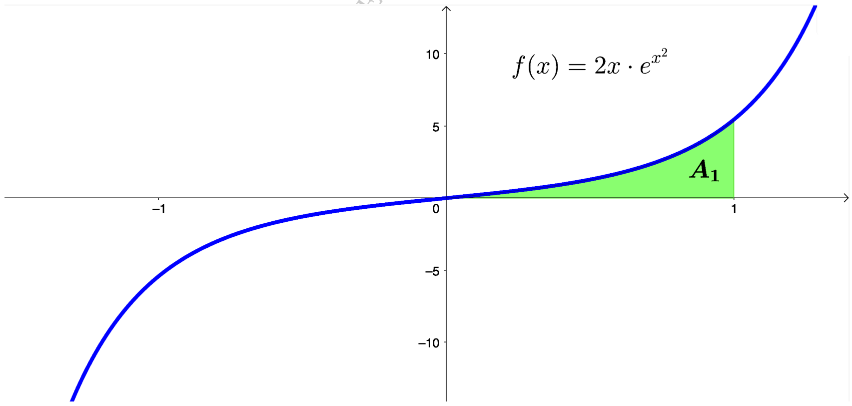
$f'(x) = e^{x^2} \cdot \left(2 + 4x^2\right) > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \implies f(x)$ es creciente en $\mathbb{R}$

b) $f(x) = 2x \cdot e^{x^2} = 0 \implies \begin{cases} 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ e^{x^2} = 0 \Rightarrow \nexists \text{ Sol.} \end{cases}$

El punto de corte con el eje OX es $x = 0$, que junto con la recta vertical $x = 1$ define un único recinto de integración $A_1 : (0, 1)$

$$A_1 = \int_0^1 f(x)\,dx = F(1) - F(0) = e^1 - e^0 = e - 1$$

$$\text{Área} = |A_1| = |e - 1| = e - 1 \simeq 1.718\ u^2$$



Ejercicio 4B (2.5 *puntos*)

Estudios realizados en un cierto país demuestran que el consumo de gasolina en autos compactos está normalmente distribuido, con una media de 6 *litros por cada* 100 *km y una desviación estándar de* 1.2 *litros por cada* 100 *km.*

I) *(1 punto) Calcula el porcentaje de autos compactos que gasta* 7 *o más litros cada* 100 *km.*

II) *(1.5 puntos) Calcula el número máximo de litros por cada* 100 *km que debe consumir un auto compacto si el fabricante quiere que supere en economía de combustible al* 95 % *de los que hay actualmente en el mercado.*

Nota: *trabaja con cuatro cifras decimales.*

(Andalucía - Matemáticas II - Modelo 2025 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Consumo de los coches compactos (l/100 km)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(6, 1.2)$$

I) $$P(X \geq 7) = P\left(Z \geq \frac{7-6}{1.2}\right) = P(Z \geq 0.83) = 1 - P(Z < 0.83) = 1 - 0.7967$$
$$= 0.2033 \implies 20.33\,\%$$

II) $$P(X \geq a) = P\left(Z \geq \frac{a-6}{1.2}\right) = P\left(Z \leq -\frac{a-6}{1.2}\right) = 0.95 \xRightarrow{Tabla} -\frac{a-6}{1.2} = 1.645$$
$$\implies \boxed{a = 4.026 \text{ l}/100}$$