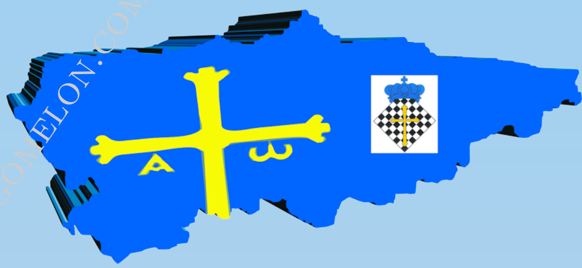
# MATEMATICAS CCSS
# EXAMENES RESUELTOS





# EVAU JULIO 2024
## - Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

# Julio 2024 (Extraordinario)

**Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)**

*Sean las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & m \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & m \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2m \\ -2m & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*a) (1 punto) Si $(A \cdot B - C) \cdot D = E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por $x$ e $y$) en función del parámetro $m$.*

*b) (1.5 puntos) ¿Para qué valores de $m$ el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = -1$.*

*(Asturias - Matemáticas CCSS - Julio 2024)*

**Solución.**

a) $(A \cdot B - C) \cdot D = E$

$$\Longrightarrow \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & m \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2m \\ -2m & -1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \left[\begin{pmatrix} 1 & 2m+1 \\ -m-1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2m \\ -2m & -1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ m-1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ (m-1)x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ (m-1)x+y=1 \end{cases}$$

b) Escribimos el sistema en forma matricial $A/A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ m-1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes

$$|A| = 1 - (m-1) = 2 - m = 0 \Longrightarrow m = 2$$

- Si $m \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A^*) = 2 = \text{n}^{\text{o}}$ incóg $\Longrightarrow$ Sistema Compaptible Determinado (solución única)
- Si $m = 2 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

  y tenemos un Sistema Compatible Indeterminado (infinitas soluciones).
- Si $m = -1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 + 2F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x+1=1 \\ \Rightarrow 3y=3 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=0 \\ y=1 \end{array}}$$

## Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

*El aforo de un local en el que se ofrecerá un espectáculo infantil, es de* 180 *personas. En global, el número de adultos debe ser, al menos, la cuarta parte del número de menores y el número de menores, al menos, la mitad del número de adultos. Si no asisten, al menos,* 45 *personas, el espectáculo se cancelará. Cada entrada infantil cuesta* 10 *euros y cada una de adulto,* 18 *euros.*

*a)* *(1.75 puntos) ¿Cuántos adultos y cuantos menores pueden asistir al espectáculo? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrían asistir* 40 *adultos y* 35 *niños?*

*b)* *(0.75 puntos) Para maximizar ingresos, ¿cuántos adultos y cuantos menores deberían asistir? ¿Cuáles serían los ingresos en ese caso?*

*(Asturias - Matemáticas CCSS - Julio 2024)*

**Solución.**

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de adultos en el espectáculo"
  $y \equiv$ "Nº de menores en el espectáculo"

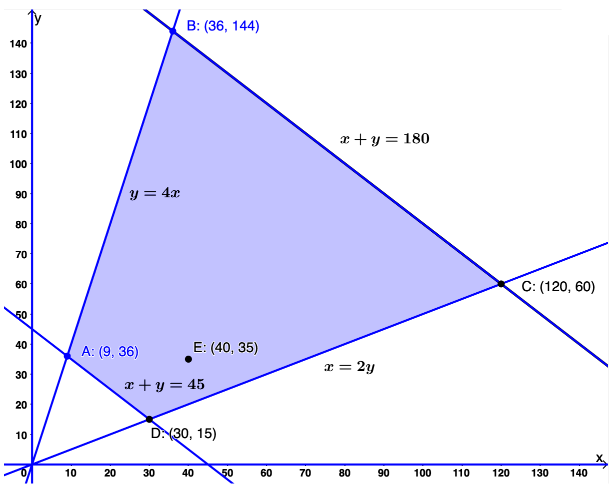
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} (1)\ x+y \le 180 \\ (2)\ x \ge \dfrac{y}{4} \\ (3)\ y \ge \dfrac{x}{2} \\ (4)\ x+y \ge 45 \\ x, y \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (1)\ x+y \le 180 & \to (0,180) \quad \& \quad (180,0) \\ (2)\ y \le 4x & \to (0,0) \quad \& \quad (20,80) \\ (3)\ x \le 2y & \to (0,0) \quad \& \quad (40,20) \\ (4)\ x+y \ge 45 & \to (0,45) \quad \& \quad (45,0) \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 18x + 10y$ (euros)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice




| Punto | $x$ | $y$ | $f(x,y)$ |
|---|---|---|---|
| A | 9 | 36 | 522 |
| B | 36 | 144 | 2088 |
| C | 120 | 60 | 2760 |
| D | 30 | 15 | 690 |

a) El punto $E:(40,35)$ está dentro de la región factible, por lo tanto es una solución posible aunque no sea la óptima (no es un vértice de la misma).

b) Los ingresos máximos son de 2760 €, que se obtienen con la asistencia de 120 adultos y 60 menores.

**Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)**

*El tiempo que un empleado tarda en completar cierta tarea ($f$) se puede expresar en función de las horas de experiencia ($x$) como sigue:*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x^2}{2000}+50 & ,\ si\ 0\leq x\leq 200\\ \dfrac{x^2}{1000}-\dfrac{3x}{5}+a & ,\ si\ 200<x\leq 300\end{cases}$$

a) *(0.75 puntos) Determina el valor de $a$ para que el tiempo de ejecución de la tarea sea continuo entre 0 y 300 horas.*

b) *(1.75 puntos) Considerando el valor de $a$ obtenido en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente la función $f$ en el intervalo $[0,300]$. ¿Cuál es el tiempo máximo que puede tardar un empleado en realizar la tarea? ¿Y el mínimo?*

*(Asturias - Matemáticas CCSS - Julio 2024)*

**Solución.**



a) `Continuidad de` $f(x)$:

- Si $x\neq 200$ $\quad f(x)$, es continua porque es un polinomio.
- Si $x=200$
  - $\lim\limits_{x\to 200^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 200}\left(\dfrac{-x^2}{2000}+50\right)=30$
  - 
  - $\lim\limits_{x\to 200^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 200}\left(\dfrac{x^2}{1000}-\dfrac{3x}{5}+a\right)=a-80$
  - $f(200)=30$

  $f(x)$ es continua en $x=200 \iff \lim\limits_{x\to 200} f(x)=f(200) \xrightarrow{30=a-80} \boxed{a=110}$

Por lo tanto el tiempo de ejecución $f(x)$ es continuo entre 0 y 300 horas si $a=110$.

b) Para $a=110$ el tiempo de ejecución es: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x^2}{2000}+50 & ,\ \text{si } 0\leq x\leq 200\\ \dfrac{x^2}{1000}-\dfrac{3x}{5}+110 & ,\ \text{si } 200<x\leq 300\end{cases}$

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{x}{1000}=0 \implies x=0\in[0,200)\\ \dfrac{x}{500}-\dfrac{3}{5}=0 \implies x=300\in(200,300]\end{cases} \qquad \& \qquad \begin{matrix} f(0)=50\\ f(200)30\\ f(300)=20\end{matrix}$$

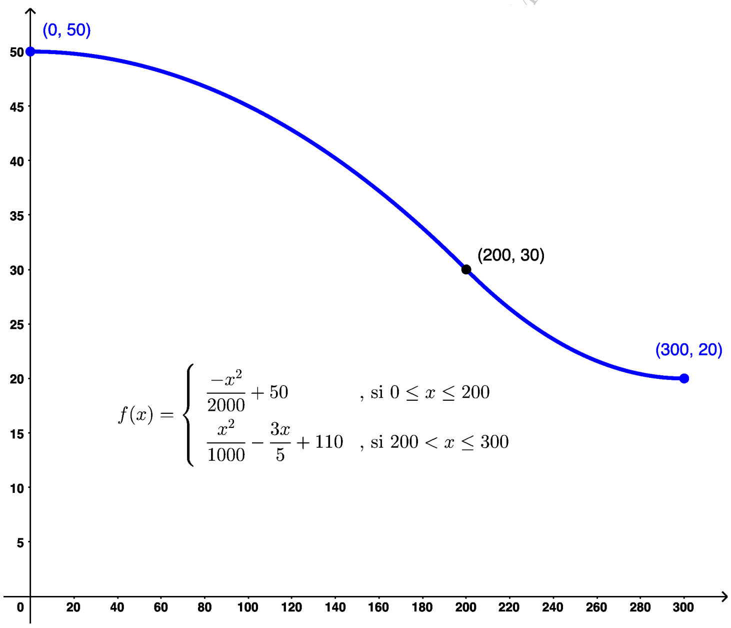
| | $(0,200)$ | $(200,300)$ |
|---|---|---|
| Signo $f'(x)$ | - | - |
| $f(x)$ | Decreciente $\searrow$ | Decreciente $\searrow$ |

La función $f(x)$ es *decreciente* en $[0, 300]$, y tiene un *máximo relativo*, que es también *absoluto*, en $(0, 50)$ y un *mínimo relativo*, que es también *absoluto*, en $(300, 20)$.

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{1000} < 0 \implies \nexists P.I. \\ \dfrac{1}{500} > 0 \implies \nexists P.I. \end{cases}$$

| | $(0, 200)$ | $(200, 300)$ |
|---|---|---|
| Signo $f''(x)$ | - | + |
| $f(x)$ | Cóncava $\cap$ | Convexa $\cup$ |

La función $f(x)$ es *cóncava* $(\cap)$ en $(0, 200)$, y *convexa* $(\cup)$ en $(200, 300)$ y tiene un *punto de inflexión* en $(200, 30)$.




El tiempo máximo de ejecución de la tarea es de 50 horas para un trabajador inexperto $(x = 0)$ horas de experiencia, mientras que el mínimo tiempo de realización de la tarea es de 20 horas para un trabajador experto $x = 300$ horas de experiencia.

**Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)**

*Dada la función $f(x) = -x^2 - 2x + 3$, se pide:*

*a) (0.5 puntos) Encontrar la primitiva $F$ de $f$ verificando que $F(1) = 1$.*

*b) (2 puntos) Estudiar y representar gráficamente la función $f$ en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva $f$ y el eje $X$ entre $x = -2$ y $x = 2$.*

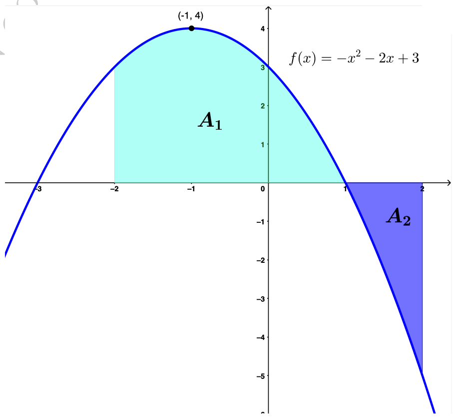
*(Asturias - Matemáticas CCSS - Julio 2024)*

**Solución.**

a) $F(x) = \int f(x)\,dx = \int \left(-x^2 - 2x + 3\right) dx = -\dfrac{x^3}{3} - x^2 + 3x + C$

$$F(1) = 1 \implies -\frac{1}{3} - 1 + 3 + C = 1 \implies C = -\frac{2}{3} \implies \boxed{F(x) = -\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x - \frac{2}{3}}$$

b) $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ es una parábola *cóncava* ($\cap$), con vértice en $x_v = \frac{2}{-2} = -1 \Rightarrow V : (-1, 4)$ y que corta al eje $OX$ en $(-3, 0)$ y $(1, 0)$.




Entre las rectas $x = -2$ y $x = 2$ se definen dos recintos de integración $A_1 : (-2, 1)$ y $A_2 : (1, 2)$

$$A_1 = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx = F(1) - F(-2) = 1 - (-8) = 9$$

$$A_2 = \int_{1}^{2} f(x)\,dx = F(2) - F(1) = -\frac{4}{3} - 1 = -\frac{7}{3}$$

$$\text{Área} = |A_1| + |A_2| = 9 + \frac{7}{3} = \frac{34}{3} \simeq 11.33\ u^2$$

**Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)**

*El 60 % de las viviendas anunciadas en una inmobiliaria se alquilan, el resto se venden. Por otra parte, 30 % de las viviendas que se alquilan y el 60 % de las que se venden son chalets, el resto son pisos.*

a) *(1.25 puntos) Si se elige un piso al azar en esa inmobiliaria, ¿cuál es la probabilidad de que se alquile?*

b) *(1.25 puntos) Si se elige una vivienda al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esté en venta o sea un chalet?*

*(Asturias - Matemáticas CCSS - Julio 2024)*

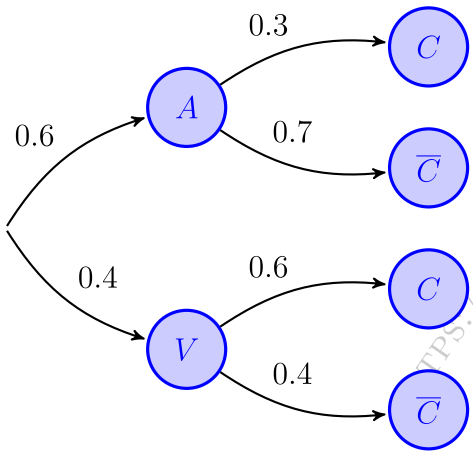
**Solución.**

Sean los sucesos:

$A \equiv$ "La vivienda se alquila" $\qquad V \equiv$ "La vivienda se vende"

$C \equiv$ "La vivienda es un chalet" $\qquad \overline{C} \equiv$ "La vivienda es un piso"






a) 
$$\begin{aligned} P(C) &= P\big((A\cap C)\cup(V\cap C)\big)\\ &= P(A\cap C)+P(V\cap C)\\ &= P(A)\cdot P(C\mid A)+P(V)\cdot P(C\mid V)\\ &= 0.6\cdot 0.3+0.4\cdot 0.6 = 0.42 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A\mid \overline{C}) &= \frac{P(A\cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \frac{P(A)\cdot P(\overline{C}\mid A)}{1-P(C)}\\ &= \frac{0.6\cdot 0.7}{1-0.42} = 0.7242 \end{aligned}$$

b) 
$$\begin{aligned} P(V\cup C) &= P(V)+P(C)-P(V\cap C)\\ &= P(V)+P(C)-P(V)\cdot P(C\mid V)\\ &= 0.4+0.42-0.4\cdot 0.6 = 0.58 \end{aligned}$$

**Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)**

> *De cierta región, se sabe que el* 40 % *de los habitantes tienen hijos, el* 20 % *de los habitantes tienen estudios superiores y el* 5 % *de los habitantes, tienen tanto hijos, como estudios superiores.*
>
> *a) (1.25 puntos) Elegido un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga ni hijos, ni estudios superiores?*
>
> *b) (1.25 puntos) Elegido al azar un habitante de entre los que tienen estudios superiores, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga hijos?*
>
> *(Asturias - Matemáticas CCSS - Julio 2024)*

**Solución.**

Sean los sucesos:

$$H \equiv \text{“La persona tiene hijos”}$$
$$S \equiv \text{“La persona tiene estudios superiores”}$$

Del enunciado tenemos:

$$P(H) = 0.4 \qquad \& \qquad P(S) = 0.2 \qquad \& \qquad P(H \cap S) = 0.05$$

a) $P(\overline{H} \cap \overline{S}) = P(\overline{H \cup S}) = 1 - P(H \cup S) = 1 - \left[P(H) + P(S) - P(H \cap S)\right]$

$= 1 - (0.4 + 0.2 - 0.5) = 0.45$

b) $P(\overline{H} \mid S) = \dfrac{P(\overline{H} \cap S)}{P(S)} = \dfrac{P(S) - P(H \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0.2 - 0.05}{0.2} = 0.75$

**Ejercicio 7 (2.5 *puntos*)**

*El importe de las hipotecas concedidas por una entidad financiera, sigue una distribución normal con desviación* 35 *miles de euros.*[*]

a) *(1.5 puntos) Para estimar el importe medio poblacional, se considera una muestra aleatoria de* 150 *hipotecas, para las que el importe medio fue de* 138 *miles de euros. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para el importe medio poblacional, con un nivel de confianza del* 90 %.

b) *(1 punto) ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero importe medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de* 5000 *euros y un nivel de confianza del* 95 %*?*

[*]*Nota: Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media* 0 *y desviación típica* 1*:*

$$F(1.28) = 0.90 \quad F(1.64) = 0.95 \quad F(1.96) = 0.975 \quad F(2.33) = 0.99 \quad F(2.58) = 0.99$$

*(Asturias - Matemáticas CCSS - Julio 2024)*

**Solución.**

$$X \equiv \text{“Importe de las hipotecas (miles de €)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 35)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 35) \xrightarrow{n=150} \overline{x} = 138 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.9$

$$1-\alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies \alpha/2 = 0.05 \implies 1-\alpha/2 = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{35}{\sqrt{150}} = 4.7$$

$$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (133.3; 142.7) \quad \text{en miles de €}}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 5 \text{ miles de €} \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.95$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{35}{\sqrt{n}} < 5 \implies n > \left(1.96 \cdot \frac{35}{5}\right)^2 = 188.23 \implies \boxed{n = 189}$$

**Ejercicio 8 (2.5 *puntos*)**

*Una empresa de telecomunicaciones hace una encuesta antes de instalar fibra en una región. Para ello selecciona al azar a 180 hogares de la zona y, tras mostrarles su oferta, anota si el hogar contrataría la fibra con esa empresa o no. El resultado del sondeo es que 130 de los hogares encuestados contratarían su fibra.**

*a) (1.5 puntos) Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la proporción poblacional de hogares que contratarían su fibra con un nivel de confianza del 95 %.*

*b) (1 punto) En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si basándonos en la misma muestra, aumentásemos el nivel de confianza?*

**Nota: Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:*

$$F(1.28) = 0.90 \quad F(1.64) = 0.95 \quad F(1.96) = 0.975 \quad F(2.33) = 0.99 \quad F(2.58) = 0.99$$

*(Asturias - Matemáticas CCSS - Julio 2024)*

**Solución.**

a) $n = 180 \quad \& \quad \hat{p} = \dfrac{130}{180} = \dfrac{13}{18} \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = \dfrac{5}{18} \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.95$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{\frac{13}{18} \cdot \frac{5}{18}}{180}} = 0.0654$$

$$I.C._{95\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(p) = (0.6568; 0.7877)}$$

b) El error es de $E = 0.0654$

Si aumentamos el nivel de confianza aumenta $z_{\alpha/2}$ y por tanto el error $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\dfrac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}$ también lo hará, haciendo que la longitud del intervalo de confianza sea mayor.