MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2024
- Ordinario -
- Suplente -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2024 (Suplente)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Se consideran las matrices:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) (1.5 puntos) Halle la matriz A que satisface la ecuación $P^{-1} \cdot A \cdot P = J$.

b) (1 punto) Compruebe que $A^3 = P \cdot J^3 \cdot P^{-1}$.

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2024 - Bloque A - Suplente)

Solución.

a) $P^{-1} \cdot A \cdot P = J \implies \underbrace{P \cdot P^{-1}}_{I} \cdot A \cdot \underbrace{P \cdot P^{-1}}_{I} = P \cdot J \cdot P^{-1} \implies \boxed{A = P \cdot J \cdot P^{-1}}$

$$|P| = -2 \quad \& \quad \text{Adj}\, P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad P^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = P \cdot J \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 \\ 0 & -4 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\implies \boxed{A = \begin{pmatrix} 1/2 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}$$

b) $A = P \cdot J \cdot P^{-1}$

$A^2 = A \cdot A = P \cdot J \cdot \underbrace{P^{-1} \cdot P}_{I} \cdot J \cdot P^{-1} = P \cdot J^2 \cdot P^{-1}$

$A^3 = A \cdot A^2 = P \cdot J \cdot \underbrace{P^{-1} \cdot P}_{I} \cdot J^2 \cdot P^{-1} = P \cdot J^3 \cdot P^{-1}$ q.e.d.

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

A una tienda de decoración le han encargado decorar las mesas de un salón de celebraciones con centros florales y candelabros. En el salón se montan siempre entre 12 y 40 mesas. En cada mesa solo se puede colocar un centro floral o un candelabro y, además, el número de candelabros no puede ser superior a una tercera parte de los centros florales. Si el precio de cada centro floral es de 32 € y el de cada candelabro de 35 €, ¿cuántos artículos de cada tipo debe seleccionar la tienda para maximizar sus ingresos? ¿a cuánto ascenderán dicho ingresos?

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2024 - Bloque A - Suplente)

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de centros florales"
  $y \equiv$ "Nº de candelabros"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

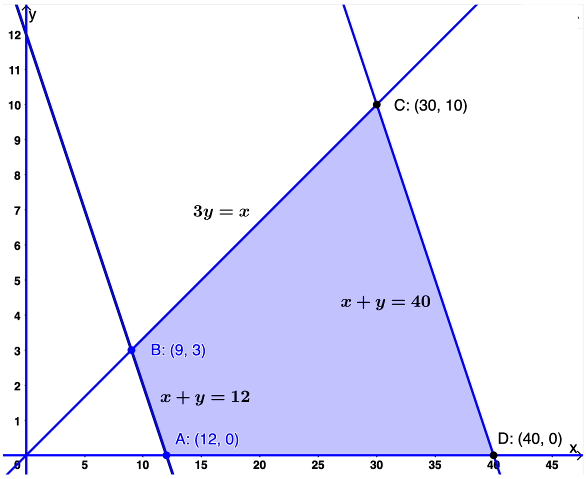
$$\begin{cases} (1)\ x+y \geq 12 \\ (2)\ x+y \leq 40 \\ (3)\ y \leq \dfrac{x}{3} \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (1)\ x+y \geq 12 & \rightarrow (0,12) \quad \& \quad (12,0) \\ (2)\ x+y \leq 40 & \rightarrow (0,40) \quad \& \quad (40,0) \\ (3)\ 3y \leq x & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (30,10) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 32x + 35y$ (euros)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	12	0	384
B	9	3	393
C	30	10	1310
D	40	0	1280



Los *ingresos máximos* son de 1310 €, colocando 30 centros florales y 10 candelabros.

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

La superficie de ampliación de un parque de atracciones, en decámetros cuadrados, coincide con el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones

$$f(x) = -x^2 + 6x \qquad \& \qquad g(x) = \frac{x^2}{5}$$

a) *(1 punto) Represente gráficamente la superficie de ampliación del parque de atracciones.*

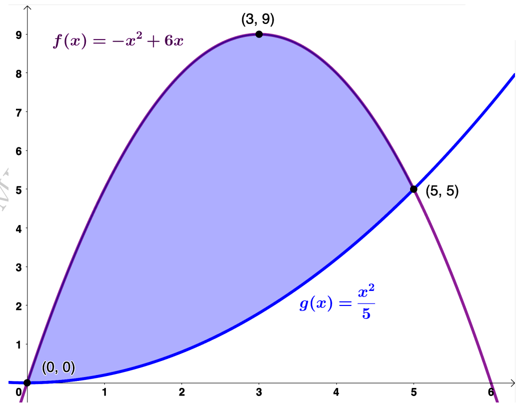
b) *(1.5 puntos) Si el coste para acondicionar el nuevo suelo es de 75 €/m^2, calcule el área de ampliación del parque y el coste total del acondicionamiento.*

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2024 - Bloque B - Suplente)

Solución.

a) Representación de la región

- $f(x) = -x^2 + 6x$ es una parábola *cóncava* ($\cap$) con vértice en $(3, 9)$ y que corta a los ejes en $(0, 0)$ y $(6, 0)$.
- $g(x) = \dfrac{x^2}{5}$ es una parábola *convexa* ($\cup$) con vértice en $(0, 0)$.
- $f(x) \cap g(x) \implies -x^2 + 6x = \dfrac{x^2}{5} \implies$ $6x^2 - 30x = 0 \implies x = \{0, 5\}$



b) $$\text{Área} = \int_0^5 [f(x) - g(x)]\,dx = \int_0^5 \left(-x^2 + 6x - \frac{x^2}{5}\right) dx = \int_0^5 \left(-\frac{6x^2}{5} + 6x\right) dx$$

$$= -\frac{2x^3}{5} + 3x^2\Big]_0^5 = (-50 + 75) - 0 = 25\ dam^2 = 2500\ m^2$$

Coste $= 75$ €$/m^2 \cdot 2500\ m^2 = 187500$ €

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Se consideran las funciones

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & , si \ -1 \leq x \leq 1 \\ (x-2)^2 & , si \ 1 < x \leq 3 \end{cases} \qquad \& \qquad g(x) = 1 \quad , si \ -1 \leq x \leq 3$$

a) *(1 punto) Estudia la continuidad y la derivabilidad de f y g en sus dominios.*

b) *(1.5 puntos) Represente el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y calcule su área.*

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2024 - Bloque B - Suplente)

Solución.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & , \text{si } -1 < x < 1 \\ 2 \cdot (x-2) & , \text{si } 1 < x < 3 \end{cases} \qquad \& \qquad g'(x) = 0 \quad , \text{si } -1 < x < 3$$

a) `Continuidad de` $f(x)$:

- Si $x \in [-1, 1) \cup (1, 3]$ la función $f(x)$ es continua por ser polinomios.
- Si $x = 1$
  - $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \left(2 - x^2\right) dx = 1$
  - $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x-2)^2 \, dx = 1$
  - $f(1) = 1$

  $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) \implies f(x)$ es continua en $x = 1$, luego continua en $[-1, 3]$.
- `Derivabilidad de` $f(x)$:

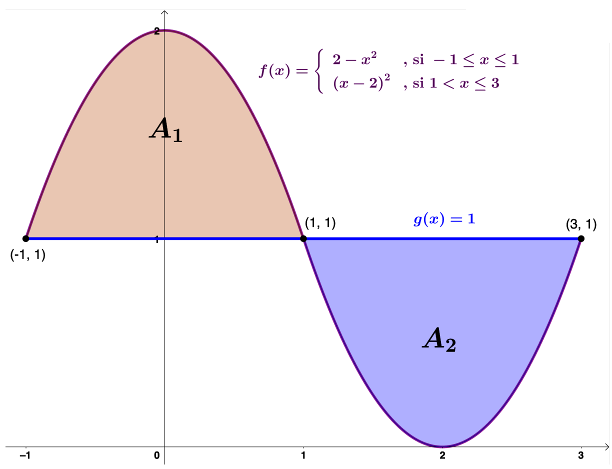
$$f'[1^-] = \lim_{x \to 1} (-2x) = -2 \qquad \& \qquad f'[1^+] = \lim_{x \to 1} (2 \cdot (x-2)) = -2$$

$f'[1^-] = f'[1^+] \implies f(x)$ es derivable en $x = 1$, luego derivable en $(-1, 3)$.

b) `Continuidad y derivabilidad de` $g(x)$:

La función $g(x)$ es una función constante y por tanto es continua en $[-1, 3]$ y derivable en $(-1, 3)$

c) $f(x) = g(x) \implies \begin{cases} 2 - x^2 = 1 \implies x = \{-1, 1\} & , \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ (x-2)^2 = 1 \implies \cancel{x = 1} \quad \& \quad x = 3 & , \text{si } 1 < x \leq 3 \end{cases}$



$$A_1 = \int_{-1}^{1} [f(x) - g(x)]\, dx = \int_{-1}^{1} \left(2 - x^2 - 1\right) dx = \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right) dx = x - \frac{x^3}{3} \bigg]_{-1}^{1}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

$$A_2 = \int_{1}^{3} [g(x) - f(x)]\, dx = \int_{1}^{3} \left(1 - (x-2)^2\right) dx = \int_{1}^{3} \left(-x^2 + 4x - 3\right) dx$$

$$= -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x \bigg]_{1}^{3} = (-9 + 18 - 9) - \left(-\frac{1}{3} + 2 - 3\right) = \frac{4}{3}$$

$$\text{Área} = |A_1| + |A_2| = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \simeq 2.67\ u^2$$

Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)

En una encuesta realizada en una librería se ha determinado que el 45 % de sus clientes compran novelas históricas, mientras que el 40 % no compra novelas de fantasía. Además, de los clientes que compran novelas de fantasía, solo el 30 % compran también novelas históricas. Elegido un cliente al azar, calcule la probabilidad de que:

a) (0.75 puntos) Compre novelas históricas y de fantasía.

b) (1 punto) No compre novelas históricas ni tampoco de fantasía.

c) (0.75 puntos) Compre una novela de fantasía, sabiendo que no ha comprado ninguna novela histórica.

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2024 - Bloque C - Suplente)

Solución.

Sean los sucesos:

$$H \equiv \text{“El cliente compra novelas históricas”}$$
$$F \equiv \text{“El cliente compra novelas de fantasía”}$$

Del enunciado tenemos:

$$P(H) = 0.45 \qquad \& \qquad P(\overline{F}) = 0.4 \Rightarrow P(F) = 1 - 0.4 = 0.6 \qquad \& \qquad P(H \mid F) = 0.3$$

a) $P(H \mid F) = \dfrac{P(H \cap F)}{P(F)} = \dfrac{P(H \cap F)}{0.6} = 0.3 \implies \boxed{P(H \cap F) = 0.18}$

b) $P(\overline{H} \cap \overline{F}) = P(\overline{H \cup F}) = 1 - P(H \cup F) = 1 - \Big[P(H) + P(F) - P(H \cap F)\Big]$

$$= 1 - (0.45 + 0.6 - 0.18) \implies \boxed{P(\overline{H} \cap \overline{F}) = 0.13}$$

c) $P(F \mid \overline{H}) = \dfrac{P(F \cap \overline{H})}{P(\overline{H})} = \dfrac{P(F) - P(F \cap H)}{1 - P(H)} = \dfrac{0.6 - 0.18}{1 - 0.45} \Rightarrow \boxed{P(F \mid \overline{H}) = 0.7636}$

Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)

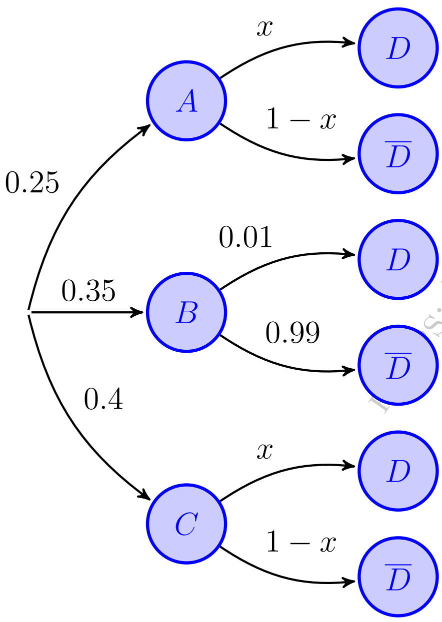
> *Una fábrica dispone de máquinas A, B y C para la fabricación de una cierta pieza. El 25 % de las piezas, son fabricadas por la máquina A, el 35 % por B y el resto por C. Tras un estudio se determina que el 2.05 % del total de las piezas fabricadas son defectuosas y que el 1 % de las piezas fabricadas por B son defectuosas.*
>
> *a) (1.25 puntos) Se selecciona una pieza al azar y resulta no ser defectuosa, ¿qué probabilidad hay de que fuera fabricada por la máquina B?*
>
> *b) (1.25 puntos) Si A y C tienen la misma probabilidad de fabricar una pieza defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que una pieza sea fabricada por A sabiendo que es defectuosa?*
>
> *(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2024 - Bloque C - Suplente)*

Solución.

Sean los sucesos:

$A \equiv$ "La pieza es de la máquina A" $\quad B \equiv$ "La pieza es de la máquina B"

$C \equiv$ "La pieza es de la máquina C" $\quad D \equiv$ "La pieza es defectuosa"



a) $$P(B \mid \overline{D}) = \frac{P(B \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{P(B) \cdot P(\overline{D} \mid B)}{1 - P(D)} = \frac{0.35 \cdot 0.99}{1 - 0.0205} = 0.3537$$

b) $$\begin{aligned} P(D) &= P\big(P(A \cap D) \cup P(B \cap D) \cup P(C \cap D)\big) \\ &= P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D) \\ &= P(A) \cdot P(D \mid A) + P(B) \cdot P(D \mid B) \\ &+ P(C) \cdot P(D \mid C) = 0.25x + 0.35 \cdot 0.01 \\ &+ 0.4x = 0.0035 + 0.65x = 0.0205 \\ &\implies x = 0.02615 \end{aligned}$$

$$P(A \mid D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A) \cdot P(D \mid A)}{P(D)} = \frac{0.25 \cdot 0.02615}{0.0205} = 0.3186$$

Ejercicio 7 (2.5 *puntos*)

Se ha administrado un determinado medicamento a una muestra de 220 enfermos de una población que padece una cierta enfermedad y se ha observado una respuesta positiva en 165 de ellos.

a) (1.5 puntos) Estime, mediante un intervalo de confianza del 97.5 %, la proporción de enfermos que responderían positivamente si este medicamento se administrase a la población de la que se ha extraído la muestra. Según el intervalo obtenido, razonar si puede admitirse que el porcentaje de enfermos que responderían positivamente al medicamento administrado, es del 70 %.

b) (1 punto) Con el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, ¿cuál debería ser el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error de estimación sea menor que el 2.5 %?

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2024 - Bloque D - Suplente)

Solución.

a) $n = 220 \quad \& \quad \hat{p} = \dfrac{165}{220} = 0.75 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.25 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.975$

$$1 - \alpha = 0.975 \Rightarrow \alpha = 0.025 \Rightarrow \alpha/2 = 0.0125 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.9875 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.24$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 2.24 \cdot \sqrt{\frac{0.75 \cdot 0.25}{220}} = 0.0654$$

$$I.C._{97.5\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{97.5\,\%}(p) = (0.6846; 0.8154)}$$

Como el valor del 70 % se encuentra dentro del intervalo (68.46 %; 81.54 %), puede admitirse que, con un nivel de confianza del 97.5 %, el porcentaje de enfermos que respondería positivamente al tratamiento sea del 70 %.

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 0.025 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.97.5$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 2.24 \cdot \sqrt{\frac{0.75 \cdot 0.25}{n}} < 0.025 \implies n \geq \left(\frac{2.24}{0.025}\right)^2 \cdot 0.75 \cdot 0.25 = 1505.28$$

$$\implies \boxed{n = 1506}$$

Ejercicio 8 (2.5 *puntos*)

Un atleta obtiene los siguientes tiempos, en minutos, de 10 repeticiones cronometradas de una prueba:

$$2.71 \quad 3.84 \quad 3.26 \quad 2.28 \quad 2.86 \quad 3.08 \quad 3.07 \quad 2.46 \quad 2.54 \quad 2.58$$

Por experiencias anteriores, se sabe que el tiempo en cada repetición sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 0.36 minutos.

a) (1.25 puntos) Calcule un intervalo de confianza para el tiempo medio de estas repeticiones con un 93.5 % de confianza.

b) (1.25 puntos) ¿Cuántas repeticiones como mínimo se tendrán que cronometrar si se quiere obtener un error en la estimación del tiempo medio inferior a 0.05 minutos manteniendo el mismo nivel de confianza?

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2024 - Bloque D - Suplente)

Solución.

$$X \equiv \text{“Tiempo cronometrado en la prueba (minutos)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 0.36)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 0.36) \xrightarrow{n=10} \overline{x} = \frac{2.71+3.84+3.26+2.28+2.86+3.08+3.07+2.46+2.54+2.58}{10} = 2.868$

& $1-\alpha = 0.935$

$$1-\alpha = 0.935 \implies \alpha = 0.065 \implies \alpha/2 = 0.0325 \implies 1-\alpha/2 = 0.9675 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.845$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.845 \cdot \frac{0.36}{\sqrt{10}} = 0.21$$

$$I.C._{93.5\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{93.5\,\%}(\mu) = (2.658; 3.078)}$$

b) $n = ?$ & $E < 0.05$ & $1-\alpha = 0.935$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.845 \cdot \frac{0.36}{\sqrt{n}} < 0.05 \Rightarrow n > \left(1.845 \cdot \frac{0.36}{0.05}\right)^2 = 176.46 \implies \boxed{n = 177}$$