MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2024
- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2024

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales, dependiente del parámetro real m y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} (2-a)x - ay + 2z = -4 \\ (a-2)x + (a+1)y = 5 \\ y + (a^2-a)z = 3-a \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(Navarra - Matemáticas II - Junio 2024)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

- Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2-a & -a & 2 & -4 \\ a-2 & a+1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & a^2-a & 3-a \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2-a & -a & 2 \\ a-2 & a+1 & 0 \\ 0 & 1 & a^2-a \end{vmatrix} = [F_2 = F_2 + F_1] = \begin{vmatrix} 2-a & -a & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a^2-a \end{vmatrix}$$

$$= (2-a)\cdot(a^2-a-2) = -(a-2)^2\cdot(a+1) = 0 \implies a = \{-1, 2\}$$

- Si $a \neq \{-1,2\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xRightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).
Resolvemos el sistema por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-a & -a & 2 & -4 \\ a-2 & a+1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & a^2-a & 3-a \end{array}\right) \sim \left[F_2 + F_1 \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2-a & -a & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a^2-a & 3-a \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2-a & -a & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-a-2 & 2-a \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow (2-a)x - a\cdot\frac{a+3}{a+1} + 2\cdot\frac{-1}{a+1} = -4 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y + 2\cdot\dfrac{-1}{a+1} = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow (a^2-a-2) = 2-a & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = -1 \\ y = \frac{a+3}{a+1} \\ z = -\frac{1}{a+1} \end{array}}$$

- Si $a = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & -4 \\ -3 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$

$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

$\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{\textit{Rouche}}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

- Si $a = 2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xRightarrow{\textit{Rouche}}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

Resolvemos el sistema para $a = 2$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x = \lambda & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2 \cdot \frac{5}{3} + 2z = -4 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 3y = 5 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \frac{5}{3} \\ z = -\frac{1}{3} \end{array} \quad , \lambda \in \mathbb{R}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Halla el rango de la matriz M según el valor de m, siendo:

$$M = \begin{pmatrix} m-1 & 3 & 0 \\ -1 & m & 1 \\ m & -1 & -1 \\ -2 & m+1 & 2 \end{pmatrix}$$

(Navarra - Matemáticas II - Junio 2024)

Solución.

$$\text{ran}\begin{pmatrix} m-1 & 3 & 0 \\ -1 & m & 1 \\ m & -1 & -1 \\ -2 & m+1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ F_3+F_2 \\ F_4-2F_2 \end{bmatrix} = \text{ran}\begin{pmatrix} m-1 & 3 & 0 \\ -1 & m & 1 \\ m-1 & -1+m & 0 \\ 0 & -m+1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 \leftrightarrow C_3 \\ C_2 \leftrightarrow C_3 \end{bmatrix} = \text{ran}\begin{pmatrix} 0 & m-1 & 3 \\ 1 & -1 & m \\ 0 & m-1 & -1+m \\ 0 & 0 & -m+1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \leftrightarrow F_2 \end{bmatrix}$$

$$= \text{ran}\begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 0 & m-1 & 3 \\ 0 & m-1 & -1+m \\ 0 & 0 & -m+1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ F_3-F_2 \\ \\ \end{bmatrix} = \text{ran}\begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 0 & m-1 & 3 \\ 0 & 0 & -4+m \\ 0 & 0 & -m+1 \end{pmatrix}$$

$$-m+1=0 \implies m=1 \quad \& \quad -4+m=0 \implies m=4$$

- Si $m \neq 1 \implies \text{ran}(M) = 3$
- Si $m = 1 \implies \text{ran}(M) = \text{ran}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

> *Los puntos $A(4,-2,-3)$, $B(2,-1,1)$ y $C(0,-3,-1)$ son vértices de un rombo.*
>
> *a) (1.75 puntos) Encuentra el cuarto vértice del rombo.*
>
> *b) (0.75 puntos) Calcula el área del rombo.*
>
> *(Navarra - Matemáticas II - Junio 2024)*

Solución.

a) No podemos suponer que los vértices son consecutivos pues no nos lo dicen. Para determinarlo vamos a calcular los siguientes lados y razonaremos tal y como muestra el dibujo adjunto.

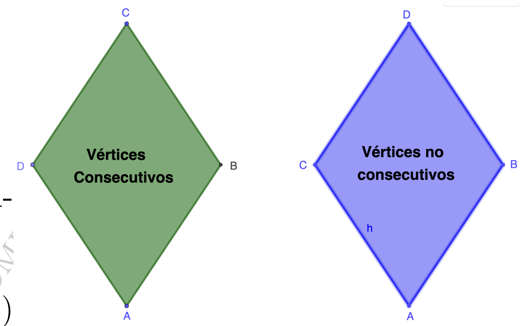
$\overrightarrow{AB} = (-2,1,4) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{21}$

$\overrightarrow{BC} = (-2,-2,-2) \Rightarrow \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{12}$

$\overrightarrow{AC} = (-4,-1,2) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{21}$

Lo que quiere decir que los vértices no son consecutivos, en cuyo caso:

$D = B + \overrightarrow{AC} = (2,-1,1) + (-4,-1,2) = (-2,-2,3)$



b) Área $= \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 4 \\ -4 & -1 & 2 \end{vmatrix} \right| = |(6,-12,6)| = \sqrt{216} = 6\sqrt{6}\ u^2$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Queremos construir un tetraedro de volumen 3 u^3, siendo tres de los vértices los puntos de corte del plano $\pi \equiv 2x - y - 2z - 2 = 0$ con los ejes de coordenadas.

a) (1.5 puntos) ¿A qué distancia de π tiene que estar el cuarto vértice del tetraedro?

b) (1 punto) Encuentra dos puntos que sirvan como cuarto vértice del tetraedro con la base dada y el volumen señalado.

(Navarra - Matemáticas II - Junio 2024)

Solución.

a)
- $\pi \cap OX \xrightarrow[z=0]{y=0} x = 1 \Longrightarrow A(1,0,0)$
- $\pi \cap Oy \xrightarrow[z=0]{x=0} y = -2 \Longrightarrow B(0,-2,0)$
- $\pi \cap OX \xrightarrow[y=0]{x=0} z = -1 \Longrightarrow C(0,0,-1)$

$$V_{tetr} = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| \cdot H = \frac{H}{6} \cdot \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \right|$$

$$= \frac{H}{6} \cdot |(2,-1,-2)| = \frac{H}{6} \cdot \sqrt{9} = \frac{H}{2} = 3 \Longrightarrow \boxed{H = 6\ u}$$

b) Como nos dan libertad, elegimos el vértice en el eje $OX \Longrightarrow V(a,0,0)$

$$d(V,\pi) = \frac{|2a - 0 - 0 - 2|}{\sqrt{4+1+4}} = 6 \Rightarrow |2a-2| = 18 \Rightarrow \begin{cases} 2a - 2 = -18 \xRightarrow{a=-8} V_1(-8,0,0) \\ 2a - 2 = 18 \xRightarrow{a=10} V_2(10,0,0) \end{cases}$$

Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)

Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) (1.25 puntos) $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\cos x}$

b) (1.25 puntos) $g(x) = \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$

(Navarra - Matemáticas II - Junio 2024)

Solución.

a) $\ln f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)^{\cos x} = \cos x \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \cos x \cdot \Big[\ln 1 - \ln x\Big] = -\cos x \cdot \ln x$

$\Longrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \operatorname{sen} x \cdot \ln x - \frac{\cos x}{x} \Longrightarrow f'(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)^{\cos x} \cdot \left(\operatorname{sen} x \cdot \ln x - \frac{\cos x}{x}\right)$

b) $g'(x) = \frac{(2x+4)\cdot(x+2)^{\cancel{2}} - (x^2+4x+1)\cdot 2\cdot \cancel{(x+2)}}{(x+2)^{\cancel{4}3}} = \frac{6}{(x+2)^3}$

Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)

Halla los máximos y mínimos (relativos y absolutos), los puntos de inflexión y las asíntotas de la función $f(x) = e^{-x^2}$. Representa, de manera aproximada, la gráfica de la función f.

(Navarra - Matemáticas II - Junio 2024)

Solución.

- `Dominio:` $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- `A. Vertical:` $\nexists\, A.V.$
- `A. Horizontal:` $\exists \underset{x\to\pm\infty}{A.H.}$ en $y = 0$
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0$
- `Extremos relativos:`

$$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2} = 0 \implies \begin{cases} -2x = 0 \implies x = 0 \\ e^{-x^2} = 0 \implies \nexists \text{ Solución} \end{cases}$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
Signo $f'(x)$	$+$	-
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

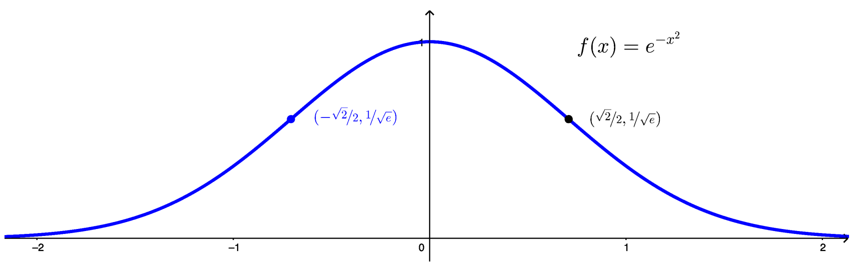
La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, 0)$ y *decreciente* en $(0, +\infty)$, y tiene un *máximo relativo*, que también es *absoluto* en $(0, 1)$.

- `Curvatura:`

$$f''(x) = e^{-x^2} \cdot (4x^2 - 2) = 0 \implies \begin{cases} 4x^2 - 2 = 0 \implies x = \pm\sqrt{2}/2 \\ e^{-x^2} = 0 \implies \nexists \text{ Solución} \end{cases}$$

	$(-\infty, -\sqrt{2}/2)$	$(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$	$(\sqrt{2}/2, +\infty)$
Signo $f''(x)$	$+$	-	$+$
$f(x)$	Convexa $\cup$	Cóncava $\cap$	Convexa $\cup$

La función $f(x)$ es *convexa* $(\cup)$ en $(-\infty, -\sqrt{2}/2) \cup (\sqrt{2}/2, +\infty)$ y *cóncava* $(\cap)$ en $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, y tiene dos *puntos de inflexión* en $(-\sqrt{2}/2, 1/\sqrt{e})$ y $(\sqrt{2}/2, 1/\sqrt{e})$.



Ejercicio 7 (2.5 *puntos*)

Se considera la función $f(x) = x^2 + e^{x/4}$.

a) *(1.25 puntos) Demuestra que la función es continua en el intervalo* $[-2, 4]$.

b) *(1.25 puntos) Comprueba que existen dos valores reales* α *y* β *en* $(-2, 4)$ *tales que* $f(\alpha) = 2 = f(\beta)$. *Enuncia el/los resultados(s) teórico(s) utilizado(s) y justifica su uso.*

(Navarra - Matemáticas II - Junio 2024)

Solución.

a) La función es continua en $\mathbb{R}$ por ser composición de funciones continuas, por lo tanto es continua en el intervalo $[-2, 4]$.

b) Para la resolución aplicaremos el *Teorema de Bolzano*, que dice: Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$, tal que $f(a) \cdot f(b) < 0 \implies \exists c \in (a, b) \mid f(c) = 0$.

- Sea $g(x) = f(x) - 2 = x^2 + e^{x/4} - 2$, continua en $[-2, 4]$ por ser composición de funciones continuas.
- $g(-2) = 2 + \sqrt{e} > 0$
- $g(0) = -1 < 0$
- $g(4) = 14 + e > 0$

Aplicamos el *Th. de Bolzano* en los intervalos:

$[-2, 0] \implies \exists \alpha \in (-2, 0) \mid g(\alpha) = f(\alpha) - 2 = 0 \implies f(\alpha) = 2$ ✓

$[0, 4] \implies \exists \beta \in (0, 4) \mid g(\beta) = f(\beta) - 2 = 0 \implies f(\beta) = 2$ ✓

Ejercicio 8 (2.5 *puntos*)

Calcula los puntos del plano en los que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = \frac{9}{x} \qquad \& \qquad g(x) = 10x - x^3$$

Tomando los dos puntos de corte con $x > 0$, calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas en el semiplano de abscisa positiva.

(Navarra - Matemáticas II - Junio 2024)

Solución.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{9}{x} = 10x - x^3 \Rightarrow x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \xrightarrow{x^2=t} t^2 - 10t + 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ t = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \end{cases}$$

En el semiplano de abscisa positiva se definen un único recinto de integración $A_1 : (1, 3)$.

$$A_1 = \int_1^3 [f(x) - g(x)]\, dx = \int_1^3 \left(\frac{9}{x} - 10x + x^3\right) dx = 9\ln x - 5x^2 + \frac{x^4}{4}\Bigg]_1^3$$

$$= \left(9\ln 3 - 45 + \frac{81}{4}\right) - \left(9\overset{0}{\cancel{\ln 1}} - 5 + \frac{1}{4}\right) = 9\ln 3 - 20$$

$$\text{Área} = |A_1| = 20 - 9\ln 3 = 10.11\ u^2$$