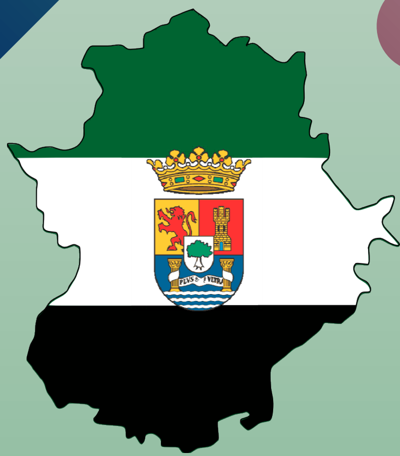
MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS



EVAU JUNIO 2024
- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2024 (Ordinario)

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Sea $b \in \mathbb{R}$ *y la matriz* $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & b+1 \\ b+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Calcular los valores de b *para los que* A *tiene inversa.*

b) Hallar A^{-1} *para el caso* $b = 0$ *(debe justificarse adecuadamente la respuesta).*

(Extremadura - Matemáticas II - Junio 2024)

Solución.

a) $|A| = -b^2 + 1 = 0 \implies b = \pm 1 \implies \exists\, A^{-1}\ \forall b \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

b) Para $b = 0 \implies A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A| = 1 \quad \& \quad \text{Adj}\, A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}\, A^{\top} \implies \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \\ a-b & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

hallar los valores de a *y* b *para que* $A \cdot M$ *sea igual a la inversa de la matriz* N.

(Extremadura - Matemáticas II - Junio 2024)

Solución.

$$A \cdot M = N^{-1} \implies A \cdot M \cdot N = \underbrace{N^{-1} \cdot N}_{I} \implies A \cdot M \cdot N = I$$

$$A \cdot M \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \\ a-b & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-b & 1 \\ b-a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2a-b-1 & -2a+b+2 \\ b-a-1 & -b+a+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a-b-1 = 1 \\ -2a+b+2 = 0 \\ b-a-1 = 0 \\ -b+a+2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} a = 3 \\ b = 4 \end{matrix}}$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x - y - 4z + 1 = 0 \\ x - 2z + 1 = 0 \end{cases}$ *y es paralelo a la recta de ecuación* $s \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z}{3}$

(Extremadura - Matemáticas II - Junio 2024)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} R(-1,0,0) \\ \vec{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (2,-2,1) \end{cases} \qquad \& \qquad s \equiv \begin{cases} S(1,3,0) \\ \vec{d_s} = (2,-1,3) \end{cases}$$

$$\pi \equiv \begin{cases} R(-1,0,0) \\ \vec{d_r} = (2,-2,1) \\ \vec{d_s} = (2,-1,3) \end{cases} \Longrightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \boxed{\pi \equiv 5x + 4y - 2z + 5 = 0}$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Dados los puntos $A(1,2,1)$*,* $B(0,3,1)$ *y* $C(1,0,-1)$*. Determinar:*

a) (1 punto) Un vector unitario y ortogonal a los vectores $\overrightarrow{AB}$ *y* $\overrightarrow{AC}$*.*

b) (0.5 puntos) El ángulo determinado por dichos vectores.

c) (0.5 puntos) El área del triángulo que forman A*,* B *y* C*.*

(Extremadura - Matemáticas II - Junio 2024)

Solución.

a) $\overrightarrow{AB} = (0,3,1) - (1,2,1) = (-1,1,0) \quad \& \quad \overrightarrow{AC} = (1,0,-1) - (1,2,1) = (0,-2,-2)$

$$\begin{cases} \left.\begin{matrix} \vec{u} \perp \overrightarrow{AB} \\ \vec{u} \perp \overrightarrow{AC} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{u} = \lambda \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = \lambda \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \lambda \cdot (-2,-2,2) \\ |u| = 1 \implies \sqrt{4\lambda^2 + 4\lambda^2 + 4\lambda^2} = 1 \implies 12\lambda^2 = 1 \implies \lambda = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} \vec{u}_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{6} \cdot (-2,-2,2) = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ \vec{u}_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{6} \cdot (-2,-2,2) = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \end{cases}$$

b) $$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{(-1,1,0)\cdot(0,-2,-2)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \implies \boxed{\alpha = 120^\circ}$$

c) $$\text{Área}_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot |(-2,-2,2)| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3}\ u^2$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Hallar los intervalos de crecimiento y los puntos extremos de la función

$$f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$$

.

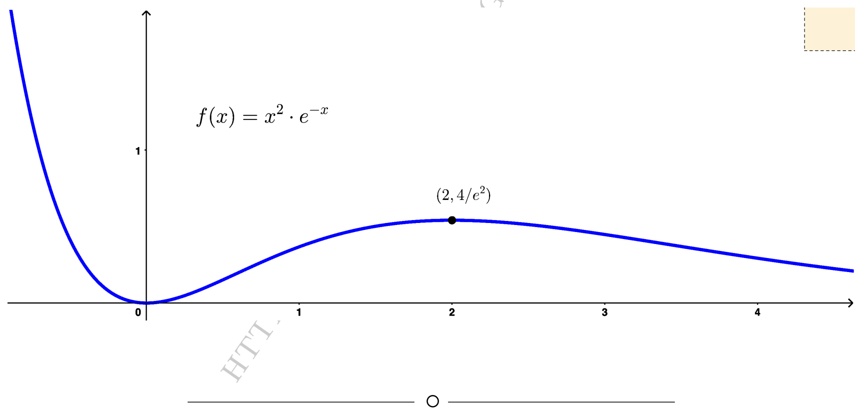
(Extremadura - Matemáticas II - Junio 2024)

Solución.

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-x} - x^2 \cdot e^{-x} = (2x - x^2) \cdot e^{-x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - x^2 = x \cdot (2 - x) = 0 \Rightarrow x = \{0, 2\} \\ e^{-x} = 0 \implies \nexists \text{ Solución} \end{cases}$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo $f'(x)$	-	$+$	-
$f(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(0, 2)$ y *decreciente* en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(0, 0)$ y un *máximo relativo* en $(2, {}^4/_{e^2})$.



Ejercicio 6 (2 *puntos*)

Calcular el valor de a para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x - x \cdot e^x}{x^2 - 2 \cdot \cos x + 2} & , \text{ si } x \neq 0 \\ a & , \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

sea continua en $x = 0$.

(Extremadura - Matemáticas II - Junio 2024)

Solución.

- $$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x \cdot e^x}{x^2 - 2 \cdot \cos x + 2} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - e^x - x \cdot e^x}{2x + 2 \cdot \sin x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$
  $$\overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-\operatorname{sen} x - e^x - e^x - x \cdot e^x}{2 + 2\cos x} = \frac{-2}{2+2} = -\frac{1}{2}$$
- $f(0) = a$

$$f(x) \text{ es continua en } x = 0 \iff \lim_{x \to 0} f(x) = f(0) \implies \boxed{a = -\frac{1}{2}}$$

Ejercicio 7 (2 *puntos*)

Hallar una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = (2x+5) \cdot e^{-2x}$ que cumpla $F(0) = 0$.

(Extremadura - Matemáticas II - Junio 2024)

Solución.

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int (2x+5) \cdot e^{-2x}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 2x+5 \Rightarrow du = 2\,dx \\ v = e^{-2x}\,dx \Rightarrow v = -\dfrac{1}{2} \cdot e^{-2x} \end{array} \right\}$$
$$= -\frac{2x+5}{2} \cdot e^{-2x} + \int \frac{1}{\cancel{2}} \cdot e^{-2x} \cdot \cancel{2}\,dx = -\frac{2x+5}{2} \cdot e^{-2x} + \int e^{-2x}\,dx$$
$$= -\frac{2x+5}{2} \cdot e^{-2x} - \frac{1}{2} \cdot e^{-2x} + C = -\frac{e^{-2x}}{2} \cdot (2x+5+1) + C = -e^{-2x} \cdot (x+3) + C$$
$$F(0) = 0 \implies -3 + C = 0 \implies C = 3 \implies \boxed{F(x) = -e^{-2x} \cdot (x+3) + 3}$$

Ejercicio 8 (2 *puntos*)

Calcular el área encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 - 5x$ y $g(x) = -x$.

(Extremadura - Matemáticas II - Junio 2024)

Solución.

$h(x) = f(x) - g(x) = x^3 - 5x - (-x) = x^3 - 4x = x \cdot (x^2 - 4) = 0 \implies x = \{-2, 0, 2\}$, lo que define dos recintos de integración $A_1 : (-2, 0)$ y $A_2 : (0, 2)$

$$A_1 = \int_{-2}^{0} h(x)\,dx = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\,dx = \left.\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0} = 0 - (4 - 8) = 4$$

$$A_2 = \int_{0}^{2} h(x)\,dx = \int_{0}^{2} (x^3 - 4x)\,dx = \left.\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{0}^{2} = (4 - 8) - 0 = -4$$

$\text{Área} = |A_1| + |A_2| = 4 + 4 = 8\ u^2$

Ejercicio 9 (2 *puntos*)

En una residencia de ancianos el 80 % de los residentes tiene cuenta de correo electrónico, el 60 % tiene redes sociales, y el 10 % no tiene ni correo electrónico ni redes sociales. Se pide calcular la probabilidad

a) (0.5 puntos) De que un residente use correo electrónico y redes sociales.

b) De que un residente use sólo una de las dos cosas.

c) (0.75 puntos) De que un residente use correo electrónico sabiendo que no usa redes sociales.

(Extremadura - Matemáticas II - Junio 2024)

Solución.

Sean los sucesos:

$C \equiv$ "El anciano tiene correo electrónico"

$R \equiv$ "El anciano tiene redes sociales"

Del enunciado tenemos:

$$P(C) = 0.8 \qquad \& \qquad P(R) = 0.6 \qquad \& \qquad P(\overline{C} \cap \overline{R}) = 0.1$$

a) $P(\overline{C} \cap \overline{R}) = P(\overline{C \cup R}) = 1 - P(C \cup R) = 0.1 \implies P(C \cup R) = 0.9$

$P(C \cap R) = P(C) + P(R) - P(C \cup R) = 0.8 + 0.6 - 0.9 \implies \boxed{P(C \cap R) = 0.5}$

b) $P\Big((C \cap \overline{R}) \cup (\overline{C} \cap R)\Big) = P(C \cup R) - P(C \cap R) = 0.9 - 0.5 \Rightarrow \boxed{P\Big((C \cap \overline{R}) \cup (\overline{C} \cap R)\Big) = 0.4}$

c) $P(C \mid \overline{R}) = \dfrac{P(C \cap \overline{R})}{P(\overline{R})} = \dfrac{P(C) - P(C \cap R)}{1 - P(R)} = \dfrac{0.8 - 0.5}{1 - 0.4} \implies \boxed{P(C \mid \overline{R}) = 0.75}$

Ejercicio 10 (2 *puntos*)

Luis es un estudiante bastante despistado y su tutora está cansada de que llegue tarde a clase. Ella le propone el siguiente trato: si en los próximos 10 *días Luis llega tarde como mucho* 3 *días, le subirá* 1 *punto en la nota final de la evaluación. Sabiendo que la probabilidad de que Luis llegue tarde a clase cada día es* 0.5*, determinar:*

*a) (*0.5 *puntos) El tipo de distribución que sigue la variable aleatoria que cuenta el número de días que Luis llega tarde a clase en los próximos* 10 *días. ¿Cuáles son sus parámetros?*

*b) (*0.75 *puntos) ¿Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución?*

*c) (*0.75 *puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que Luis consiga esa subida de* 1 *punto en la nota final?*

(Extremadura - Matemáticas II - Junio 2024)

Solución.

a) $X \equiv$ "Nº días que Luis llega tarde a clase" $\longrightarrow X : \mathcal{B}(10, 0.5) \Rightarrow \begin{cases} n = 10 \\ p = 0.5 \\ q = 1 - p = 0.5 \end{cases}$

b) $\mu = np = 10 \cdot 0.5 = 5 \qquad \& \qquad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{10 \cdot 0.5 \cdot 0.5} = 1.5811$

c) $$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \binom{10}{0} \cdot 0.5^0 \cdot 0.5^{10}$$
$$+ \binom{10}{1} \cdot 0.5^1 \cdot 0.5^9 + \binom{10}{2} \cdot 0.5^2 \cdot 0.5^8 + \binom{10}{3} \cdot 0.5^3 \cdot 0.5^7 = 0.1719$$