MATEMATICAS CCSS

EXAMENES RESUELTOS

EVAU JULIO 2024

- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2024 (Ordinario)

Ejercicio 1 (3.33 *puntos*)

Responda a las siguientes cuestiones:

a) *(5 puntos) Determine el orden de la matriz X para que la ecuación matricial $AX + 3B = C$ esté bien planteada, siendo*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resuelva la ecuación matricial despejando previamente X.

b) *(5 puntos) Un pueblo necesita recaudar fondos para combatir una plaga de termitas y han decidido financiar parte del tratamiento mediante la venta de participaciones para el sorteo de Lotería del 22 de diciembre. Ofrecen tres tipos de participaciones de 10 euros, de 25 euros y de 5 euros. Se sabe que han vendido la mitad de participaciones de 10 euros que de 25 euros; en total, han recaudado 7100 € y han vendido 430 participaciones. Utilizando técnicas matriciales, determine la cantidad de participaciones vendidas de cada tipo. Con una ganancia de 2.50 € por cada participación de 10 €, de 5 euros por cada participación de 25 € y de 1 € por cada participación de 5 €, ¿a cuánto asciende la ganancia total?*

(Aragón - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

a) $$\underbrace{\underbrace{A}_{2\times 2}\,\underbrace{X}_{m\times n}}_{2\times m} + \underbrace{3\underbrace{B}_{2\times 3}}_{2\times 3} = \underbrace{C}_{2\times 3} \xrightarrow[n=3]{m=2} X \in \mathcal{M}_{2\times 3}$$

$$AX + 3B = C \implies AX = C - 3B \implies \underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I}\cdot X = A^{-1}\cdot(C-3B)$$

$$\implies \boxed{X = A^{-1}\cdot(C-3B)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A| = -1 \quad \& \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}\cdot(C-3B) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} -9 & 2 & 2 \\ 14 & -5 & 0 \end{pmatrix}}$$

b) Sean las incógnitas:

$x \equiv$ "Nº de papeletas de 10 euros"
$y \equiv$ "Nº de papeletas de 25 euros"
$z \equiv$ "Nº de papeletas de 5 euros"

$$\begin{cases} x = \dfrac{y}{2} \\ 10x + 25y + 5z = 7100 \\ x + y + z = 430 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 430 \\ 2x - y = 0 \\ 2x + 5y + z = 1420 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 430 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 1420 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 430 \\ 0 & -3 & -2 & -860 \\ 0 & 3 & -1 & 560 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 + F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 430 \\ 0 & -3 & -2 & -860 \\ 0 & 0 & -3 & -300 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x + 220 + 100 = 430 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -3y - 200 = -860 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -3z = -300 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 110 \\ y = 220 \\ z = 100 \end{array}}$$

La ganancia total será:

$$110 \cdot 2.5 + 220 \cdot 5 + 100 \cdot 1 = 1475 \text{ euros}$$

Planteamos el sistema en forma matricial y lo resolvemos de esta manera:

$$AX = B \implies \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 430 \\ 0 \\ 1420 \end{pmatrix}$$

$$AX = B \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot B \implies \boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

$$|A| = 9 \quad \& \quad \operatorname{Adj} A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 12 \\ 4 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \& \quad A^{-1} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 12 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 12 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 430 \\ 0 \\ 1420 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 220 \\ 100 \end{pmatrix} \implies \boxed{\begin{array}{c} x = 110 \\ y = 220 \\ z = 100 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (3.33 *puntos*)

Una empresa produce dos productos, A y B, con ganancias de 30 € y 40 € por unidad producida, respectivamente. La producción de A requiere 3 horas de mano de obra y 2 unidades de material, mientras que la producción de B requiere 2 horas de mano de obra y 3 unidades de material. Los recursos disponibles son 150 horas de mano de obra y 150 unidades de material. Además, debido a requisitos de distribución, se establece que la producción total debe ser mayor o igual a 20 unidades entre ambos productos.

a) (8 puntos) Plantee y resuelva un problema que permita determinar el número de unidades de cada tipo que deben producirse para maximizar la ganancia total y a cuánto ascendería dicha ganancia.

b) (2 puntos) Considerando la región factible del apartado a) y una nueva función objetivo dada por: $\max f(x,y) = 30x + by$, donde b es un valor desconocido. Razone que $(40,40)$ no puede ser solución óptima del nuevo problema. Análogo con $(20,20)$.

(Aragón - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

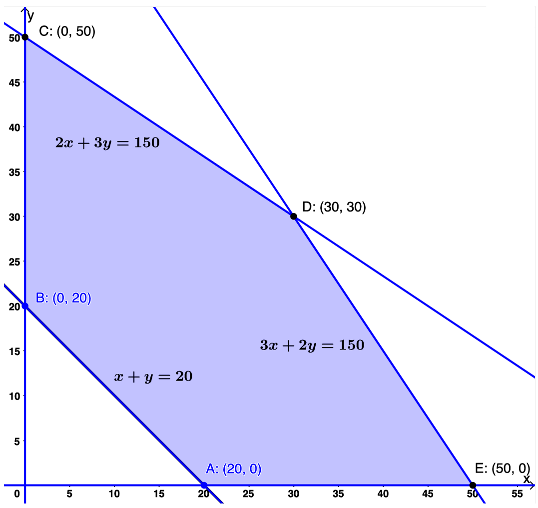
Solución.

	Producto A	Producto B	Restricción
Mano de obra (h)	3	2	≤ 150
Material (ud.)	2	3	≤ 150

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de unidades del producto A"
  $y \equiv$ "Nº de unidades del producto B"
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} (1)\ x + y \geq 20 & \to (0,20) \quad \& \quad (20,0) \\ (2)\ 3x + 2y \leq 150 & \to (0,75) \quad \& \quad (50,0) \\ (3)\ 2x + 3y \leq 150 & \to (0,50) \quad \& \quad (75,0) \\ x, y \geq 0 & \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = 30x + 40y \quad (€)$
- `Región factible`
- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$



Punto	x	y	$f(x,y)$
A	20	0	600
B	0	20	800
C	0	50	2000
D	30	30	2100
E	50	0	1500

La *ganancia total máxima* es de 2100 € con una producción de 30 unidades de cada producto.

b) El punto $(40, 40)$ no pertenece a la región factible y por tanto no puede ser solución del problema.
El punto $(20, 20)$ se encuentra dentro de la región factible, es decir, que cumple las restricciones del problema pero al no ser un vértice de la región factible no optimiza la función $f(x, y) = 30x + by$.

———— ∘ ————

Ejercicio 3 (3.33 *puntos*)

Dada la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 50, \quad 0 \leq x \leq 8.$

a) (4 puntos) Calcule el valor máximo y mínimo de $f(x)$ cuando $x \in [0, 8]$ y la abscisa donde se obtienen dichos valores, especificando si se corresponde con extremos relativos y/o absolutos.

b) (3 puntos) ¿$f(x)$ tiene algún punto de inflexión? Analice la concavidad y convexidad de $f(x)$.

c) (3 puntos) Calcule $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx$.

(Aragón - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

a) $f'(x) = 3x^2 - 18x + 40 = 0 \implies \nexists$ Solución $\implies \nexists$ extremos relativos.

$f'(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \implies f(x)$ es creciente en $(0, 8)$, luego el *mínimo absoluto* se encuentra en $(0, 50)$ y el *máximo absoluto* en $(8, 306)$.

b) $f''(x) = 6x - 18 = 0 \implies x = 3$

	$(0,3)$	$(3,8)$
Signo $f''(x)$	-	$+$
$f(x)$	Cóncava $\cap$	Convexa $\cup$

La función $f(x)$ es *cóncava* $(\cap)$ en $(0, 3)$ y *convexa* $(\cup)$ en $(3, 8)$, y tiene un *punto de inflexión* en $(3, 116)$.

c) $$\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 \left(x^3 - 9x^2 + 40x + 50\right)dx = \left.\frac{x^4}{4} - 3x^3 + 20x^2 + 50x\right]_1^3$$
$$= \left(\frac{81}{4} - 81 + 180 + 150\right) - \left(\frac{1}{4} - 3 + 20 + 50\right) = 202$$

———— ∘ ————

Ejercicio 4 (3.33 *puntos*)

La obsolescencia tecnológica implica una disminución del valor de un producto con el tiempo. En cierto dispositivo, el valor $V(t) > 0$*, viene dado por* $V(t) = 200 - \dfrac{100t}{10+2t}$ *€, siendo* t *los años transcurridos desde la compra del dispositivo.*

a) (3 puntos) Calcule el valor inicial del producto y su valor en un horizonte infinito de tiempo.

b) (4 puntos) Calcule $V'(t)$ *y justifique que* $V(t)$ *es decreciente. Utilice esta conclusión y los resultados obtenidos en a) para argumentar que no será posible que el valor de* $V(t)$ *sea igual a 125 €.*

c) (3 puntos) ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que el disposistivo tenga un valor de 175 €?

(Aragón - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

a) $V(0) = 200 - \dfrac{0}{10+0} = 200$ € es el valor inicial

$\lim\limits_{t\to+\infty} V(t) = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(200 - \dfrac{100t}{10+2t}\right) = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = 200 - \dfrac{100}{2} = 150$ € en el infinito

b) $V'(t) = -\dfrac{100\cdot(10+2t) - 100t\cdot 2}{(10+2t)^2} = -\dfrac{1000}{(10+2t)^2} < 0 \implies V(t)$ es decreciente en $\mathbb{R}$

La función $V(t)$ parte de un valor de 200 y decrece, teniendo una asíntota horizontal en $y = 150$, por lo que no puede alcanzar el valor 125 en ningún momento.

c) $V(t) = 200 - \dfrac{100t}{10+2t} = 175 \implies 2000 + 400t - 100t = 1750 + 350t$

$\implies 50t = 250 \implies t = 5$ años

Ejercicio 5 (3.33 *puntos*)

Juan va a hacer un examen de Geografía que tiene 4 preguntas. Juan piensa que, en cada pregunta, la probabilidad que tiene de responderla correctamente es 0.7 *y que cada pregunta es independiente de las demás.*

a) (3 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que Juan conteste conrrectamente todas las preguntas?

b) (4 puntos) Juan aprobará el examen si contesta, al menos, 2 preguntas correctamente. ¿Cuál es la probabilidad que tiene Juan de aprobar el examen?

c) (3 puntos) Si Juan ha aprobado el examen, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya hecho contestando correctamente todas las preguntas?

(Aragón - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

$$X \equiv \text{“N}^{\underline{\text{o}}}\text{ de preguntas contestadas correctamente”} \longrightarrow X : \mathcal{B}(4, 0.7)$$

a) $P(X = 4) = \binom{4}{4} \cdot 0.7^4 \cdot 0.3^0 = 0.2401$

b) $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 1 - \left[\binom{4}{0} \cdot 0.7^0 \cdot 0.3^4 + \binom{4}{1} \cdot 0.7^1 \cdot 0.3^3\right] = 1 - 0.0837 = 0.9163$

c) $P(X = 4 \mid X \geq 2) = \dfrac{P(X = 4 \cap X \geq 2)}{P(X \geq 2)} = \dfrac{P(X = 4)}{P(X \geq 2)} = \dfrac{0.2401}{0.9163} = 0.2620$

Ejercicio 6 (3.33 *puntos*)

En una ciudad se presentan dos personas a la alcaldía: Rupérez y García.

a) *(5 puntos) Se ha realizado una encuesta sobre la intención de voto, para lo cual se ha tomado una muestra aleatoria simple de 200 votantes y 120 de ellos van a votar a Rupérez, mientras que el resto votarán a García. Calcule un intervalo de confianza a nivel 98 % para la proporción de votantes de la ciudad que votarán a Rupérez.*

b) *(2 puntos) El periódico de la ciudad afirma que Rupérez obtendrá un 75 % de los votos. A la vista de los resultados del apartado a), ¿es razonable tal afirmación?*

c) *(3 puntos) Una vez realizada la votación, Rupérez ha ganado con el 62 % de los votos. Si elegimos a 3 votantes con reemplazamiento, calcule la probabilidad de que al menos 1 de ellos haya votado por Rupérez.*

(Aragón - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

a) $n = 200 \quad \& \quad \hat{p} = \dfrac{120}{200} = 0.6 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.4 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.98$

$$1 - \alpha = 0.98 \implies \alpha = 0.02 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.01 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.99 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.325$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 2.325 \cdot \sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{200}} = 0.0805$$

$$I.C._{98\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{98\,\%}(p) = (0.5195; 0.6805)}$$

b) El apartado anterior nos dice que con un nivel de confianza del 98 % el porcentaje de votos que obtendrá Rupérez se sitúa entre el 51.95 % y el 68.05 %, por lo que la afirmación del enunciado no es razonable.

c) $X \equiv$ “Nº de votantes de Rupérez” $\longrightarrow X : \mathcal{B}(3, 0.62)$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{3}{0} \cdot 0.62^0 \cdot 0.38^3 = 0.9451$$