MATEMATICAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JULIO 2024
- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2024 (Extraordinario)

Ejercicio 1 (3.33 *puntos*)

Responda a las siguientes cuestiones:

a) (5 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \& \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y la ecuación matricial $AX - IX = B$, despeje la matriz X y resuelva dicha ecuación matricial.

b) (5 puntos) Un producto llamado "TechGadget" puede ser adquirido a través de tres canales de venta: en tienda física (a un precio de 10 €), en tienda online (a un precio de 6 €) y en tienda de segunda mano (a un precio de 5 €). Este mes se ha registrado un total de 1600 € en ventas de este producto. Además, se sabe que el número de unidades vendidas en tienda online es 5 veces el de unidades vendidas en tienda física, y que por las ventas, en tienda de segunda mano, se obtienen 800 € más que por las ventas en tienda física. Plantee un sistema de ecuaciones para obtener el número de unidades del producto que se han vendido este mes por cada canal de venta y resuelva dicho sistema utilizando técnicas matriciales.

(Aragón - Matemáticas CCSS - Julio 2024)

Solución.

a) $AX - IX = B \implies (A-I)\cdot X = B \implies \underbrace{(A-I)^{-1}\cdot(A-I)}_{I}\cdot X = (A-I)^{-1}\cdot B$

$$\implies \boxed{X = (A-I)^{-1}\cdot B}$$

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \& \quad (A-I)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = (A-I)^{-1}\cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}}$$

b) Sean las incógnitas:

$x \equiv$ "Nº de unidades vendidas en tienda física"
$y \equiv$ "Nº de unidades vendidas en tienda online"
$z \equiv$ "Nº de unidades vendidas en tienda de segunda mano"

$$\begin{cases} 10x + 6y + 5z = 1600 \\ y = 5x \\ 5z = 800 + 10x \end{cases} \implies \begin{cases} 2x - z = -160 \\ 5x - y = 0 \\ 10x + 6y + 5z = 1600 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & -160 \\ 5 & -1 & 0 & 0 \\ 10 & 6 & 5 & 1600 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 2F_2 - 5F_1 \\ F_3 - 5F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & -160 \\ 0 & -2 & 5 & 800 \\ 0 & 6 & 10 & 2400 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 + 3F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & -160 \\ 0 & -2 & 5 & 800 \\ 0 & 0 & 25 & 4800 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow 2x - 192 = -160 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2y + 5 \cdot 192 = 800 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 25z = 4800 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 16 \\ y = 80 \\ z = 192 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (3.33 *puntos*)

Javier, disfruta mucho de los partidos de fútbol y de los conciertos, y su presupuesto anual para este tipo de ocio está limitado a 1000 euros. Cada partido de fútbol cuesta. 60 euros y cada concierto 40 euros. Con la condición de asistir, a al menos tantos partidos de fútbol como conciertos y acudir a un máximo de 14 partidos de fútbol al año, responda a las siguientes preguntas:

a) (2 puntos) ¿Puede Javier asistir a 8 partidos de fútbol y a 8 conciertos? En caso afirmativo, ¿gasta todo su presupuesto?

b) (8 puntos) Si Javier busca maximizar el número de salidas para divertirse, plantee y resuelva un problema de programación lineal para determinar cuántas veces puede ir a cada sitio. ¿Cuántas escapadas disfrutará en total?

(Aragón - Matemáticas CCSS - Julio 2024)

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de salidas al fútbol"
  $y \equiv$ "Nº de salidas a conciertos"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

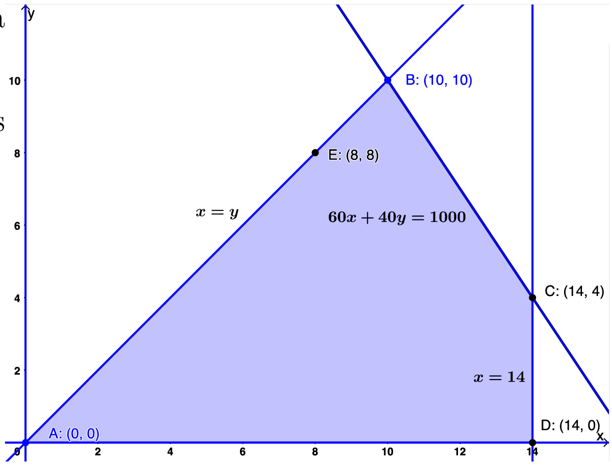
$$\begin{cases} (1)\ 60x + 40y \leq 1000 & \to (0,25) \quad \& \quad (16.7,0) \\ (2)\ x \geq y & \to (0,0) \quad \& \quad (10,10) \\ (3)\ x \leq 14 & \to (14,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = x + y$ (salidas)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	10	10	20
C	14	4	18
D	14	0	14



a) El punto $(8,8)$ se encuentra en la región factible, luego cumple las restricciones del problema. Al estar sobre la recta $x = y$ no se gastará todo el presupuesto, sino tan solo $60 \cdot 8 + 40 \cdot 8 = 800$ €.

b) El número de escapadas máximo $f(x,y)$ es de 20, distribuidas en 10 en fútbol y 10 en conciertos. El gasto en ese caso será de $60 \cdot 10 + 40 \cdot 10 = 1000$ €, agotando el presupuesto disponible.

Ejercicio 3 (3.33 *puntos*)

El cálculo del índice de progreso real (IPR) de un país viene determinado por la función $IPR(t) = -t^3 + 54t^2 + 480t + 6000$*, siendo* $t \in [0, 62]$ *el número de años transcurridos desde* 1932*. Se pide:*

a) (4 puntos) Estudia el crecimiento y decrecimiento del IPR del país.

b) (3 puntos) ¿En qué año el IPR alcanza su valor máximo y cuál es dicho valor? Asimismo ¿en qué año el IPR registra su valor mínimo, y cuál es dicho valor?

c) (3 puntos) Analice la concavidad y convexidad de la función $IPR(t)$*, e indique, si existe, algún punto de inflexión.*

(Aragón - Matemáticas CCSS - Julio 2024)

Solución.

a) $IPR'(t) = -3t^2 + 108t + 480 = 0 \implies \begin{cases} \cancel{t = -4} \\ t = 40 \end{cases}$

	$(0, 40)$	$(40, 62)$
Signo $IPR'(t)$	+	-
$IPR(t)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

El índice de progreso real $IPR(t)$ es *creciente* en $(0, 40)$, es decir, entre los años 1932 y 1972; y *decreciente* en $(40, 62)$, es decir, entre los años 1972 y 1994.

b) $IPR(0) = 6000 \quad \& \quad IPR(40) = 47600 \quad \& \quad IPR(62) = 5008$

El IPR tiene un *máximo relativo*, que es también *absoluto* en 1972 y asciende a 47600, mientras que el *mínimo relativo*, que es también *absoluto* se produce en 1994 y asciende a 5008.

c) $IPR''(t) = -6t + 108 = 0 \implies t = 18$

	$(0, 18)$	$(18, 62)$
Signo $IPR''(x)$	+	-
IPR	Convexa $\cup$	Cóncava $\cap$

La función $IPR(t)$ es *convexa* ($\cup$) en $(0, 18)$ y *cóncava* ($\cap$) en $(18, 62)$, y tiene un *punto de inflexión* en $(18, 26304)$, es decir, en el año 1950 y vale 26304.

Ejercicio 4 (3.33 *puntos*)

Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2-x} & , \text{ si } x < 2 \\ 1 & , \text{ si } x = 2 \\ x - \sqrt{x^2 - 2x} & , \text{ si } x > 2 \end{cases}$

a) (3 puntos) Estudie la continuidad de $f(x)$.

b) (3 puntos) Calcule $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

c) (4 puntos) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

(Aragón - Matemáticas CCSS - Julio 2024)

Solución.

a)
- Si $x < 2 \implies f_1(x) = \dfrac{1}{2-x}$, continua en $\mathbb{R} - \{2\}$, luego continua si $x < 2$.
- Si $x > 2 \Rightarrow f_2(x) = x - \sqrt{x^2 - 2x}$, continua si $x^2 - 2x > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, luego continua si $x > 2$.
- Si $x = 2$
  - $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{1}{2-x} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$
  - $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2}\left(x - \sqrt{x^2 - 2x}\right) = 2$
  - $f(2) = 1$

  $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x) \implies f(x)$ no es continua en $x = 2$, donde tiene una discontinuidad inevitable de salto infinito.

Por lo tanto la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$.

b) $$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2-x}\,dx = -\int_0^1 \underbrace{\frac{-1}{2-x}}_{u'/u}\,dx = -\ln(2-x)\Big]_0^1$$

$$= \left(-\cancelto{0}{\ln 1}\right) - \left(-\ln 2\right) = \ln 2$$

c) $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - \sqrt{x^2 - 2x}\right) = [\infty - \infty]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x - \sqrt{x^2-2x}\right)\cdot\left(x + \sqrt{x^2-2x}\right)}{x + \sqrt{x^2-2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - (x^2 - 2x)}{x + \sqrt{x^2-2x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x + \sqrt{x^2-2x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{2}{1+\sqrt{1}} = 1$$

Ejercicio 5 (3.33 *puntos*)

En España, el 30 % de la población tiene menos de 30 años, el 50 % tiene entre 30 y 65 años y el 20 % tiene más de 65 años. Un estudio afirma que, de las personas de menos de 30 años el 70 % tiene teléfono móvil, que de las personas entre 30 y 65 años el 95 % tiene teléfono móvil y que de las personas de más 65 años el 50 % tiene teléfono móvil.

a) (3 puntos) Se elige una persona al azar. Calcule la probabilidad de que tenga más de 65 años y posea teléfono móvil.

b) (2 puntos) Elegimos una persona al azar. ¿cuál es la probabilidad de que tenga teléfono móvil?

c) (2 puntos) Elegimos una persona al azar y resulta que tiene teléfono móvil. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga más de 65 años?

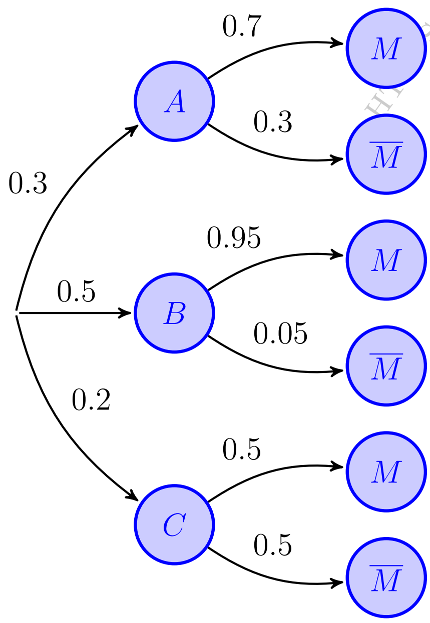
d) (3 puntos) Elegimos a una persona de cada uno de los tres grupos de edad. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres tengan teléfono móvil? (Puede suponerse independencia entre las tres personas).

(Aragón - Matemáticas CCSS - Julio 2024)

Solución.

Sean los sucesos:

$A \equiv$ "La persona tiene menos de 30 años" $B \equiv$ "La persona tiene entre 30 y 65 años"
$C \equiv$ "La persona tiene más de 65" $M \equiv$ "La persona tiene teléfono móvil"



a) $P(C \cap M) = P(C) \cdot P(M \mid C) = 0.2 \cdot 0.5 = 0.1$

b) $$\begin{aligned} P(M) &= P\big((A \cap M) \cup (B \cap M) \cup (C \cap M)\big) \\ &= P(A \cap M) + P(B \cap M) + P(C \cap M) \\ &= P(A) \cdot P(M \mid A) + P(B) \cdot P(M \mid B) \\ &+ P(C) \cdot P(M \mid C) = 0.3 \cdot 0.7 \\ &+ 0.5 \cdot 0.95 + 0.2 \cdot 0.5 = 0.785 \end{aligned}$$

c) $$P(C \mid M) = \frac{P(C \cap M)}{P(M)} = \frac{P(C) \cdot P(M \mid C)}{P(M)} = \frac{0.2 \cdot 0.5}{0.785} = 0.1274$$

d) $$\begin{aligned} &P\big((M \mid A) \cap (M \mid B) \cap (M \mid C)\big) \\ &= P(M \mid A) \cdot P(M \mid B) \cdot P(M \mid C) \\ &= 0.7 \cdot 0.95 \cdot 0.5 = 0.3325 \end{aligned}$$

Ejercicio 6 (3.33 *puntos*)

Responda a las siguientes preguntas:

a) *(2 puntos) En una ciudad, según los datos del INE, el 52 % de los habitantes son mujeres y el 48 % son hombres. Se eligen cuatro personas de esa ciudad con reemplazamiento. Sea X la variable que cuenta el número de hombres seleccionados. ¿Qué distribución tiene la variable X? Calcule $P(X=2)$.*

b) *(8 puntos) Queremos realizar una encuesta entre los aficionados de un equipo de fútbol para estimar, mediante un intervalo de confianza, qué proporción piensa que su equipo va a ascender a primera división el año que viene. Usaremos un nivel de confianza del 95 %.*

b.1) *(4 puntos) Si queremos que el intervalo no tenga una amplitud de más de 0.08, ¿cuál es el número mínimo de aficionados a los que tenemos que preguntar?*

b.2) *(4 puntos) Decidimos preguntar a 120 aficionados, de los cuales 80 dicen que piensan que el equipo ascenderá. Calcule un intervalo de confinaza para la proporción de aficionados que piensa que el equipo va a ascender.*

(Aragón - Matemáticas CCSS - Julio 2024)

Solución.

a) $X \equiv$ "Nº de de hombres entre las 4 personas" $\longrightarrow X : \mathcal{B}(4, 0.48)$

$$P(X=2) = \binom{4}{2} \cdot 0.48^2 \cdot 0.52^2 = 0.3738$$

b.1) Como no tenemos dato de p utilizamos la opción más desfavorable que sería $\hat{p} = 0.5 \implies \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.5$

$$n = ? \qquad \& \qquad 2E \leq 0.08 \implies E \leq 0.04 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.95$$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} \leq 0.04 \implies n \geq \left(\frac{1.96}{0.04}\right)^2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 600.25$$

$$\implies \boxed{n = 601}$$

b.2) $n = 120 \quad \& \quad \hat{p} = \dfrac{80}{120} = \dfrac{2}{3} \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = \dfrac{1}{3} \quad \& \quad 1-\alpha = 0.95$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}}{120}} = 0.0843$$

$$I.C._{95\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(p) = (0.5824; 0.7509)}$$