MATEMATICAS II

EXAMENES RESUELTOS

EVAU JULIO 2024

- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2024
Opción A

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro λ.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) *(1.5 puntos) Discutir el sistema en función de los valores de λ.*

b) *(1 punto) Resolver el sistema en el caso $\lambda = 1$ y encontrar, si es posible, una solución con $x = 5$.*

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2024 - Opción A)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda-1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \implies \lambda = \{1, 2\}$$

- Si $\lambda \neq \{1,2\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $\lambda = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

- Si $\lambda = 2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche} \text{Sistema Incompatible } (\nexists \text{ solución})$$

b) Resolvemos el sistema para $\lambda = 1$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{ll} \Rightarrow y + \lambda = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow x + \lambda = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = 1 - \lambda \ , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Si $x = 5 = -\lambda \implies \lambda = -5 \implies \boxed{x = 5 \quad \& \quad y = 6 \quad \& \quad z = -5}$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

> a) *(1 punto) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 cuya gráfica sea tangente a la recta $y = x$ en el punto $(0, 0)$.*
>
> b) *(1 punto) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 que tenga un máximo relativo en el punto $(1, 1)$.*
>
> c) *(0.5 puntos) Justifique si una función polinómica de grado 2 puede tener dos extremos relativos en $\mathbb{R}$*
>
> *(Madrid - Matemáticas II - Julio 2024 - Opción A)*

Solución.

a) $f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \& \qquad f'(x) = 2ax + b \qquad \& \qquad f''(x) = 2a$

- Pdte. de r.t. en $(0, 0)$ es 1: $\Longrightarrow\ m_r = f'(0) = 1 \Longrightarrow b = 1$
- Pasa por $(0, 0)$: $\Longrightarrow\ f(0) = 0 \Longrightarrow c = 0$

Si tomamos $a = 1$, una opción sería: $\boxed{f(x) = x^2 + x}$

b)
- E. rel. en $(1, 1)$: $\Longrightarrow\ f'(1) = 0 \Longrightarrow 2a + b = 0 \Longrightarrow b = -2a$
- Pasa por $(1, 1)$: $\Longrightarrow\ f(1) = 1 \Longrightarrow a + b + c = 1 \xrightarrow{b=-2a} c = a + 1$

Tomamos los valores:

$$a = 1 \quad \& \quad b = -2 \quad \& \quad c = 2 \Longrightarrow f(x) = x^2 - 2x + 2$$

y comprobamos que $f''(1) = 2 > 0 \xrightarrow{(\cup)}$ Mínimo, por lo tanto hemos de tomar los valores:

$$a = -1 \quad \& \quad b = 2 \quad \& \quad c = 0 \Longrightarrow \boxed{f(x) = -x^2 + 2x}$$

y en este caso $f''(1) = -2 < 0 \xrightarrow{(\cap)}$ Máximo relativo en $(1, 1)$

c) La derivada de una función polinómica de grado 2 es de la forma $f'(x) = 2ax + b$, cuyos puntos críticos son $2ax + b = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{b}{2a}$, lo que significa que tiene un único extremo relativo.

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Sean los puntos $P(1,-1,3)$ y $Q(2,1,-1)$:

a) (1 punto) Determine una ecuación del plano respecto del cual ambos puntos son simétricos.

b) (1.5 puntos) El segmento $\overline{PQ}$ es uno de los tres lados del triángulo cuya suma de los cuadrados de las lontitudes de sus lados es 34 y el tercer vértice se encuentra en la recta $r \equiv x-2=y=z$. Calcule las coordenadas del tercer vértice sabiendo que ninguna de sus coordenadas es nula.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2024 - Opción A)

Solución.

a) El plano pedido es el mediador, que pasa por el punto medio de P y Q y es perpendicular al segmento $\overline{PQ}$.

$$\pi \equiv \begin{cases} M_{\overline{PQ}} = \dfrac{P+Q}{2} = \left(\frac{3}{2},0,1\right) \\ \vec{n}_\pi = \overrightarrow{PQ} = (1,2,-4) \end{cases} \Rightarrow x+2y-4z+D=0 \xrightarrow{M_{\overline{PQ}} \in \pi} \frac{3}{2}+0-4+D=0$$

$$\Longrightarrow D=\frac{5}{2} \Longrightarrow \pi \equiv x+2y-4z+\frac{5}{2}=0 \Longrightarrow \boxed{\pi \equiv 2x+4y-8z+5=0}$$

b) $$r \equiv \begin{cases} R(2,0,0) \\ \vec{d}_r = (1,1,1) \end{cases} \Longrightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Longrightarrow X(2+\lambda,\lambda,\lambda)$$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2+\left|\overrightarrow{QX}\right|^2+\left|\overrightarrow{XP}\right|^2 = |(1,2,-4)|^2+|(\lambda,\lambda-1,\lambda+1)|^2+|(-1-\lambda,-1-\lambda,3-\lambda)|^2$$

$$= 21+\lambda^2+(\lambda-1)^2+(\lambda+1)^2+2\cdot(-\lambda-1)^2+(3-\lambda)^2 = 6\lambda^2-2\lambda+\cancel{34}=\cancel{34}$$

$$\Longrightarrow 2\lambda\cdot(3\lambda-1)=0 \Longrightarrow \begin{cases} \cancel{\lambda=0} \text{ (Ninguna coordenada nula)} \\ \lambda = \dfrac{1}{3} \Longrightarrow \boxed{X\left(\dfrac{7}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)} \end{cases}$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

> *En un espacio muestral se tienen dos sucesos incompatibles, A_1 y A_2, de igual probabilidad* 0.4 *y se considera $A_3 = \overline{A_1 \cup A_2}$ (por tanto, la probabilidad de A_3 es* 0.2*). De cierto suceso B se sabe que $P(B \mid A_1) = P(B \mid A_2)$ y $P(B \mid A_3) = 2P(B \mid A_1)$. Y de un suceso C independiente de A_1 se sabe que $P(C \mid A_2) = 0.3$ y $P(C \mid A_3) = 0.6$. Con estos datos se pide:*
>
> *a) (1 punto) Calcular la probabilidad de B si $P(B \mid A_1) = 0.25$.*
>
> *b) (1.5 puntos) Calcular la probabilidad de C y determinar si C es independiente de A_2.*
>
> *(Madrid - Matemáticas II - Julio 2024 - Opción A)*

Solución.

a) Del enunciado tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} P(B \mid A_1) = P(B \mid A_2) \\ P(B \mid A_3) = 2P(B \mid A_1) \end{array}\right\} \xRightarrow{P(B|A_1)=0.25} \begin{cases} P(B \mid A_1) = 0.25 \\ P(B \mid A_2) = 0.25 \\ P(B \mid A_3) = 0.5 \end{cases}$$

Como $A_3 = \overline{A_1 \cup A_3} \implies A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$, ademas los sucesos A_1 y A_2 son incompatibles, es decir $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Por lo tanto los sucesos A_1, A_2 y A_3 forman una partición del espacio muestral (son incompatibles dos a dos y su unión es el espacio muestral). Por el *Teorema de la Probabilidad Total* tenemos que:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B \mid A_1) + P(A_2) \cdot P(B \mid A_2) + P(A_3) \cdot P(B \mid A_3)$$

$$= 0.4 \cdot 0.25 + 0.4 \cdot 0.25 + 0.2 \cdot 0.5 \implies \boxed{P(B) = 0.3}$$

b) Volvemos a aplicar el *Teorema de la Probabilidad Total* al suceso C:

$$P(C) = P(A_1) \cdot P(C \mid A_1) + P(A_2) \cdot P(C \mid A_2) + P(A_3) \cdot P(C \mid A_3)$$

$$= 0.4 \cdot P(C \mid A_1) + 0.4 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.6 \underset{\text{Indep.}}{\overset{A_1 \text{ y } C}{=}} 0.4 \cdot P(A_1) + 0.24 = 0.4 \cdot 0.4 + 0.24$$

$$\implies \boxed{P(C) = 0.4}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(C \mid A_2) = \dfrac{P(C \cap A_2)}{P(A_2)} = \dfrac{P(C \cap A_2)}{0.4} = 0.3 \implies P(C \cap A_2) = 0.12 \\ P(C) \cdot P(A_2) = 0.4 \cdot 0.4 = 0.16 \end{array}\right\} \implies$$

$P(C) \cdot P(A_2) \neq P(C \cap A_2) \implies$ los sucesos C y A_2 no son independientes.

Julio 2024
Opción B

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Como es bien sabido, la siguiente igualdad de determinantes

$$\det(A+B) = \det A + \det B$$

no es cierta en general.

a) *(0.75 puntos) Si A y B son dos matrices para las que $\det(A+B) = \det A + \det B$, pruebe que entonces*

$$\det\Big((A+B)^2\Big) = \det\Big(A^2\Big) + \det\Big(B^2\Big) + 2\det(AB).$$

b) *(1 punto) Dadas las matrices* $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 2 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$ & $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

determine el único valor de α con el que sí se cumple la igualdad $\det(C+D) = \det C + \det D$.

c) *(0.75 puntos) Para el valor $\alpha = -1$, resuelva el sistema homogéneo de ecuaciones lineales que tiene a C como matriz de coeficientes.*

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2024 - Opción B)

Solución.

a) $\det\Big((A+B)^2\Big) = \Big[\det(A+B)\Big]^2 = \Big(\det A + \det B\Big)^2 = \Big(\det A\Big)^2 + \Big(\det B\Big)^2 + 2\det A \cdot \det B$

$$= \det(A^2) + \det(B^2) + 2\det(AB) \text{ q.e.d.}$$

b) $\det(C+D) = \det C + \det D$

$$\Longrightarrow \det\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 2 & -1 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 2 & -1 & \alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2+\alpha & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1+\alpha \end{vmatrix} = (2\alpha+2)+2 \Longrightarrow 4\alpha = 2\alpha + 4 \Longrightarrow \boxed{\alpha = 2}$$

c) Para $\alpha = -1$ es sistema homogéneo en forma matricial queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2 + F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ F_3 + F_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x - \lambda = 0 \\ \Rightarrow y - \lambda = 0 \\ \Rightarrow z = \lambda \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \lambda \ , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Dada la función $f(x) = x^3 - 3x$, se pide:

a) (0.75 puntos) Estudiar si es par o impar y calcular sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

b) (1.75 puntos) Calcular el área de la región acotada delimitada por las gráfica de $f(x)$ y de $g(x) = x \cdot (x-3)$.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2024 - Opción B)

Solución.

a) $$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^3 - 3x \\ f(-x) = -x^3 + 3x \\ -f(x) = -x^3 + 3x \end{array}\right\} \Longrightarrow f(-x) = -f(x) \Longrightarrow f(x) \text{ tiene simetría } \textit{Impar}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo $f'(x)$	$+$	-	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

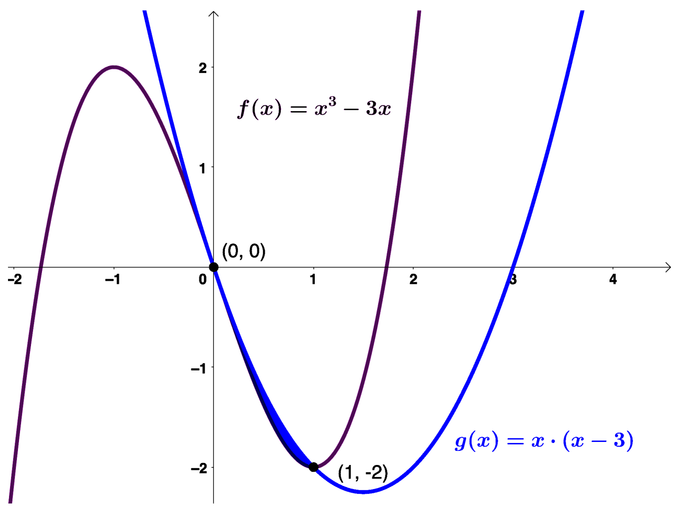
La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y *decreciente* en $(-1, 1)$, y tiene un *máximo relativo* en $(-1, 2)$ y un *mínimo relativo* en $(1, -2)$.

b) $f(x) = x^3 - 3x \quad \& \quad g(x) = x \cdot (x-3) = x^2 - 3x$

$h(x) = f(x) - g(x) = x^3 - x^2 = x^2 \cdot (x-1) = 0 \Longrightarrow x = \{0, 1\}$, luego tenemos un único recinto de integración $A_1 : (0, 1)$

$$A_1 = \int_0^1 h(x)\,dx = \int_0^1 \left(x^3 - x^2\right) dx = \left.\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) - 0 = -\frac{1}{12}$$

$$\text{Área} = |A_1| = \frac{1}{12}\ u^2$$



Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Dado el punto $P(5,-1,2)$ y las rectas:

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-0}{1} \quad \& \quad s \equiv \begin{cases} x-y=5 \\ x+z=3 \end{cases}$$

se pide:

a) *(1 punto) Estudiar la posición relativa de ambas rectas y hallar la distancia entre ellas.*

b) *(1.5 puntos) Determinar una ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta r.*

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2024 - Opción B)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} R(2,-1,0) \\ \vec{d}_r = (3,-1,1) \end{cases} \quad \Rightarrow r \equiv \begin{cases} S(5,0,-2) \\ \vec{d}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-1,1) \end{cases} \quad \& \quad \overrightarrow{RS} = (3,1,-2)$$

a) $\dfrac{3}{-1} \neq \dfrac{-1}{-1} \neq \dfrac{1}{1} \implies r$ y s se cortan o se cruzan

$$\left[\vec{d}_r, \vec{d}_s, \overrightarrow{RS}\right] = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \implies r \text{ y } s \text{ se cruzan en el espacio}$$

$$d(r,s) = \frac{\left|\left[\vec{d}_r, \vec{d}_s, \overrightarrow{RS}\right]\right|}{\left|\vec{d}_r \times \vec{d}_s\right|} = \frac{|4|}{\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}\right|} = \frac{4}{|(0,-4,-4)|} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ u$$

b) $$\pi \equiv \begin{cases} P(5,-1,2) \\ \vec{n}_\pi = \vec{d}_r = (3,-1,1) \end{cases} \implies \pi \equiv 3x - y + z + D = 0 \xrightarrow{P\in\pi} 15+1+2+D$$

$$\xrightarrow{D=-18} \pi \equiv 3x - y + z - 18 = 0$$

$$Q = r \cap \pi \implies 3\cdot(2+3\lambda) - (-1-\lambda) + \lambda - 18 = 0 \xrightarrow{\lambda=1} Q = (5,-2,1)$$

$$t \equiv \begin{cases} P(5,-1,2) \\ \vec{d}_t = \overrightarrow{PQ} = (0,-1,-1) \end{cases} \implies t \equiv \begin{cases} x = 5 \\ y = -1-\mu \\ z = 2-\mu \end{cases} , \ \mu \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

> *Antonio y Benito, compañeros de piso, lanzan alternadamente un dardo cinco veces a una diana para decidir quién friega. Friega quien menos veces acierte el centro de la diana. En caso de empate, friegan juntos. Si Antonio acierta el centro de la diana en el* 25 % *de sus lanzamientos y Benito en el* 30 %, *se pide:*
>
> *a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que no haga falta llegar al cuarto lanzamiento para decidir quién friega.*
>
> *b) (1.5 puntos) Aproximando por una normal, calcular la probabilidad de que Antonio falle el centro de la diana en al menos dos terceraas partes de* 60 *lanzamientos.*
>
> *(Madrid - Matemáticas II - Julio 2024 - Opción B)*

Solución.

Sean las variables aleatorias:

$$A \equiv \text{“Nº de dianas de Antonio”} \longrightarrow A : \mathcal{B}(5, 0.25)$$
$$B \equiv \text{“Nº de dianas de Benito”} \longrightarrow B : \mathcal{B}(5, 0.3)$$

a) Si no hace falta llegar al cuarto lanzamiento es porque uno de los dos jugadores acierta los tres primeros lanzamientos, mientras que el otro los falla. En ese caso $A : \mathcal{B}(3, 0.25) \quad \& \quad B : \mathcal{B}(3, 0.3)$

$$P\Big((A = 3 \cap B = 0) \cup (A = 0 \cap B = 3)\Big) = P(A = 3 \cap B = 0) + P(A = 0 \cap B = 3)$$
$$= \binom{3}{3} \cdot 0.25^3 \cdot 0.75^0 \cdot \binom{3}{0} \cdot 0.3^0 \cdot 0.7^3 + \binom{3}{0} \cdot 0.25^0 \cdot 0.75^3 \cdot \binom{3}{3} \cdot 0.3^3 \cdot 0.7^0$$
$$= 0.25^3 \cdot 0.7^3 + 0.75^3 \cdot 0.3^3 = 0.01675$$

b) $X \equiv \text{“Nº de dianas falladas por Antonio”} \longrightarrow X : \mathcal{B}(60, 0.75)$

$$X : \mathcal{B}(60, 0.75) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n = 60 > 20 \checkmark \\ np = 45 > 5 \checkmark \\ nq = 15 \checkmark \end{array} \right\} \Rightarrow Y : \mathcal{N}(np, \sqrt{npq}) = \mathcal{N}(45, 3.35)$$

$$P\left(X \geq \frac{2}{3} \cdot 60\right) = P(X \geq 40) = P(Y \geq 39.5) = P\left(Z \geq \frac{39.5 - 45}{3.35}\right)$$
$$= P(Z \geq -1.64) = P(Z \leq 1.64) = 0.9495$$