MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JULIO 2024
- Extraordinario -
(Coincidentes)

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2024 (coincidentes)

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera la matriz A dada por:

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 4 & b \end{pmatrix}$$

a) *(1 punto) Determine todos los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para los que se verifica que $A^2 = \mathcal{O}$, donde $\mathcal{O}$ denota la matriz nula de tamaño 2×2.*

b) *(1 punto) Sea $a = 2$ y $b = -2$. Sabiendo que $B = A + I$, donde I denota la matriz identidad de tamaño 2×2, calcule B^2 y B^{10}.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2024 - Coincidentes)

Solución.

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 4 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & -1 \\ 4 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - 4 & -a - b \\ 4a + 4b & -4 + b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} a^2 - 4 = 0 \implies a = \pm 2 \\ -a - b = 0 \implies a = -b \\ 4a + 4b = 0 \implies a = -b \\ -4 + b^2 = 0 \implies b = \pm 2 \end{cases} \xRightarrow[a=-2 \ \& \ b=2]{a=2 \ \& \ b=-2} A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \& \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

b) Si $a = 2 \ \& \ b = -2 \implies A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \& \quad A^2 = \mathcal{O}$

$$B^2 = (A + I)^2 = \cancelto{\mathcal{O}}{A^2} + 2A + I = 2A + I = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B \cdot B^2 = (A + I) \cdot (2A + I) = 3\cancelto{\mathcal{O}}{A^2} + A + 2A + I = 3A + I$$

$$B^n = nA + I = \begin{pmatrix} 2n + 1 & -n \\ 4n & -2n + 1 \end{pmatrix}$$

Hacemos la demostración por el método de inducción:

- `Caso Base:` $n = 1 \implies B^1 = A + I$ ✓
- `Hipótesis de Inducción:` $B^k = kA + I$
- `Paso Inductivo:`

  $$B^{k+1} = B \cdot B^k = B \cdot (kA + I) = (A + I) \cdot (kA + I) = k\cancelto{\mathcal{O}}{A^2} + A + kA + I$$
  $$= (k + 1) \cdot A + I \text{ q.e.d.}$$

Por lo tanto $B^{10} = 10A + I = \begin{pmatrix} 21 & -10 \\ 40 & -19 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = ax + \sqrt{x^2+2}$$

a) (1 punto)Obtenga el valor del parámetro real a para que la derivada de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ tome el valor $1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

b) (1 punto) Para $a = 1$, calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2024 - Coincidentes)

Solución.

a) $f'(x) = a + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}} \implies f'(1) = a + \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}} \implies \boxed{a = 1}$

b) Para $a = 1 \implies f(x) = x + \sqrt{x^2+2}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x + \sqrt{x^2+2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2} - x\right) = [\infty - \infty]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2} - x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+2} + x\right)}{\sqrt{x^2+2}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2} + 2 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+2}+x} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{, si } x \leq 0 \\ k & \text{, si } 0 < x < 2 \\ -2x^2 + x + 6 & \text{, si } x \geq 2 \end{cases}$$

a) (1 punto) Determine, si es posible, el valor del parámetro real k para que esta función sea continua en todo su dominio.

b) (1 punto) Considerando $k = 1$, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2024 - Coincidentes)

Solución.

a)
- `Dominio:` $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, por ser polinomios y exponenciales
- `Continuidad en` $x = 0$:
  - $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0} e^x = 1$
  - $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0} k = k$
  - $f(0) = e^0 = 1$

$$f(x) \text{ es continua en } x=0 \iff \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \implies \boxed{k=1}$$

- `Continuidad en` $x=2$:
  - $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2} k = k$
  - $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2}\left(-2x^2+x+6\right) = 0$
  - $f(2) = -2\cdot 4 + 2 + 6 = 0$

$$f(x) \text{ es continua en } x=2 \iff \lim_{x\to 2} f(x) = f(2) \implies \boxed{k=0}$$

Por lo tanto $\nexists\ k \in \mathbb{R}$ de manera que la función sea continua en todo su dominio.

b) Para $k=1$, hallamos los cortes con el eje OX, entre las rectas $x=-1$ y $x=1$.

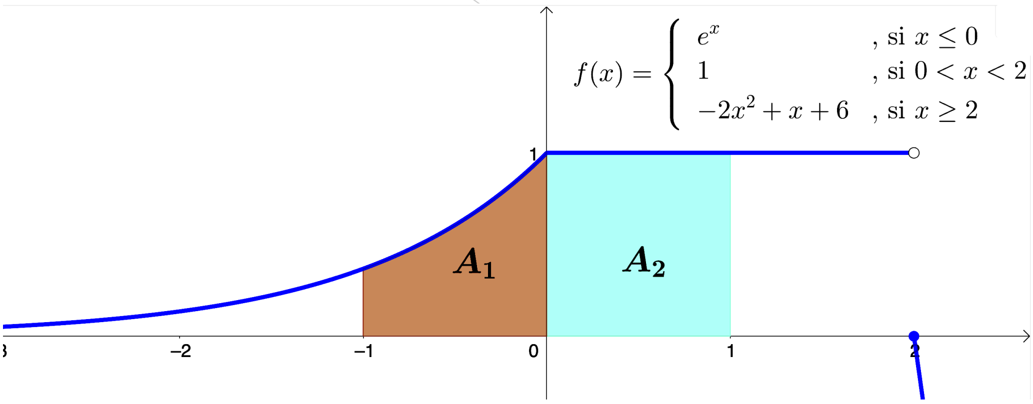
$$f(x) = \begin{cases} e^x = 0 \implies \nexists \text{ Pto. de corte} & , \text{si } x \le 0 \\ 1 = 0 \implies \nexists \text{ Pto. de corte} & , \text{si } 0 < x < 2 \\ -2x^2+x+6 & , \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

Por lo tanto tenemos dos recintos de integración $A_1 : (-1,0)$ para $f_1(x) = e^x$ y $A_2 : (0,2)$ para $f_2(x) = 1$

$$A_1 = \int_{-1}^{0} f_1(x)\,dx = \int_{-1}^{0} e^x\,dx = e^x\Big]_{-1}^{0} = e^0 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}$$

$$A_2 = \int_{0}^{1} f_2(x)\,dx = \int_{0}^{1} dx = x\Big]_{0}^{1} = 1 - 0 = 1$$

$$\text{Área} = |A_1| + |A_2| = \frac{e-1}{e} + 1 = \frac{2e-1}{e} \simeq 1.632\ u^2$$



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 6}{x^2 + 3}$$

a) (1 punto) Determine el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de esta función.

b) (1 punto) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2024 - Coincidentes)

Solución.

a)
- `Dominio:` $x^2 + 3 = 0 \implies \nexists$ Sol. $\implies \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- `Monotonía:` $f'(x) = \dfrac{4x \cdot (x^2+3) - 2x \cdot (2x^2 - 6)}{(x^2+3)^2} = \dfrac{24x}{(x^2+3)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
Signo $f'(x)$	-	+
$f(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

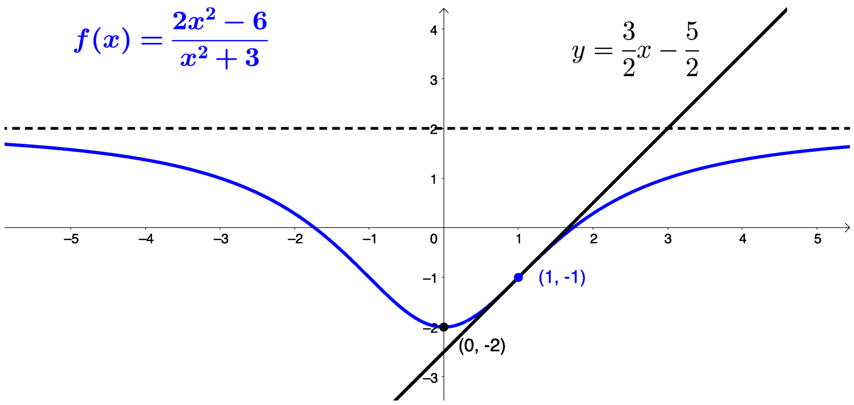
La función $f(x)$ es *creciente* en $(0, +\infty)$ y *decreciente* en $(-\infty, 0)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(0, -2)$.

b) $x_0 = 1 \implies y_0 = f(x_0) = f(1) = -1 \implies (x_0, y_0) = (1, -1)$

$$f'(x) = \frac{24x}{(x^2+3)^2}$$

$$m_r = f'(x_0) = f'(1) = \frac{3}{2}$$

$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \implies y + 1 = \frac{3}{2} \cdot (x - 1) \implies \boxed{r \equiv y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}}$$



Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Una fábrica de piensos produce 2 tipos de piensos para ganado, $P1$ y $P2$. Cada kg de $P1$ contiene 500 gramos de cereales, 300 de leguminosas y 200 de otros componentes adicionales. Cada kg de $P2$ contiene 600 gramos de cereales, 200 de leguminosas y 200 de otros componentes. Se dispone de 30 kg de cereales y 12 kg de leguminosas. Los componentes adicionales no están restringidos. Un kg de pienso $P1$ le da un beneficio de 1 euro y un kg de pienso $P2$ de 2 euros. ¿Cuántos kg de pienso de cada tipo debe fabricar para maximizar sus beneficios? ¿Cuál es el beneficio máximo obtenido?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2024 - Coincidentes)

Solución.

	Pienso $P1$	Pienso $P2$	Restricción
Cereales (kg/kg pienso)	0.5	0.6	≤ 30
Leguminosas (kg/kg pienso)	0.3	0.2	≤ 12
Otros componentes (kg/kg pienso)	0.2	0.2	

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Kg. de pienso $P1$ a fabricar"
  $y \equiv$ "Kg. de pienso $P2$ a fabricar"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

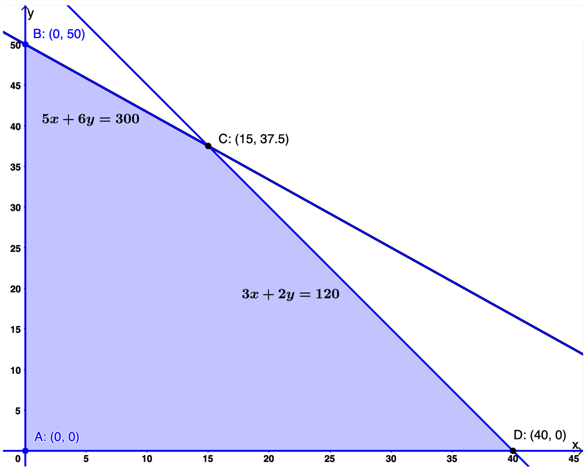
$$\begin{cases} (1)\ 0.5x + 0.6y \leq 30 \\ (2)\ 0.3x + 0.2y \leq 12 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (1)\ 5x + 6y \leq 300 & \to (0, 50) \quad \& \quad (60, 0) \\ (2)\ 3x + 2y \leq 120 & \to (0, 60) \quad \& \quad (40, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x, y) = x + 2y$ (euro)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	50	100
C	15	37.5	90
D	40	0	40



El *beneficio máximo* es de 100 euros, fabricando tan solo 50 kg de pienso $P2$.

Ejercicio 6 (2 *puntos*)

De cada 100 libros prestados en una biblioteca, 90 son novelas, biografías y libros de autoayuda. Además, se observa que los libros de autoayuda prestados son la mitad de las novelas y el número de las biografías es 5 unidades menor que el de las novelas. Plantee el sistema de ecuaciones y calcule el porcentaje de libros prestados de cada tipo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2024 - Coincidentes)

Solución.

Sean las incógnitas:

$x \equiv$ "Nº de novelas prestadas (de cada 100 préstamos)"
$y \equiv$ "Nº de biografías presatdas (de cada 100 préstamos)"
$z \equiv$ "Nº de libros de autoayuda prestados (de cada 100 préstamos)"

$$\begin{cases} x+y+z=90 \\ z=\dfrac{x}{2} \\ y=x-5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=90 \\ x-2z=0 \\ x-y=5 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & -1 & -3 & -90 \\ 0 & -2 & -1 & -85 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ F_3-2F_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & -1 & -3 & -90 \\ 0 & 0 & 5 & 95 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x+33+19=90 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -y-3\cdot 19=-90 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 5z=95 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x=38 \Rightarrow 38\,\% \\ y=33 \Rightarrow 33\,\% \\ z=19 \Rightarrow 19\,\% \end{array}}$$

Por lo tanto el 38 % de los libros prestados son novelas, el 33 % biografías y el 19 % libros de autoayuda.

Ejercicio 7 (2 *puntos*)

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x - 2y + (a+1)z = 1 \\ 2x - az = 2 \\ (a+2)x - ay = 4 \end{cases}$$

a) *(1 punto) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.*

b) *(1 punto) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = -1$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2024 - Coincidentes)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & a+1 & 1 \\ 2 & 0 & -a & 2 \\ a+2 & -a & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -a^2 + 2a = a \cdot (2-a) = 0 \implies a = \{0, 2\}$$

- Si $a \neq \{0,2\}$ $|A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

- Si $a = 2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 4 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

ran$(A) = 2 = $ ran$(A^*) \neq$ nº incóg. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = -1$, teniendo en cuenta que estamos ante un S.C.D.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x - 2 = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 4 + z = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 3y = 3 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 1 \\ z = -4 \end{array}}$$

Ejercicio 8 (2 *puntos*)

El 80 % de las prendas producidas por una cadena de ropa se fabrican en Asia y, desafortunadamente, el 35 % de las prendas producidas por esa cadena se han fabricado usando mano de obra infantil. Además, el 70 % de las prendas analizadas se fabrican en Asia o se han fabricado usando mano de obra infantil. Eligiendo una prenda de esa cadena al azar, calcule la probabilidad dee que:

a) (1 punto) Se haya fabricado en Asia y se haya fabricado usando mano de obra infantil.

b) (1 punto) No se haya fabricado en Asia, sabiendo que no se ha fabricado usando mano de obra infantil.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2024 - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$A \equiv$ "La prenda se ha fabricado en Asia"

$I \equiv$ "La prenda se ha fabricado con mano de obra infantil"

Del enunciado tenemos:

$$P(A) = 0.8 \qquad \& \qquad P(I \mid A) = 0.35 \qquad \& \qquad P(A \cup I) = 0.7$$

a) $P(I \mid A) = \dfrac{P(I \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(I \cap A)}{0.8} = 0.35 \Longrightarrow \boxed{P(I \cap A) = 0.28}$

b) $P(A \cup I) = P(A) + P(I) - P(I \cap A) \Longrightarrow 0.7 = 0.8 + P(I) - 0.28 \Longrightarrow P(I) = 0.18$

$$P(\overline{A} \mid \overline{I}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{I})}{P(\overline{I})} = \frac{P(\overline{A \cup I})}{P(\overline{I})} = \frac{1 - P(A \cup I)}{1 - P(I)} = \frac{1 - 0.7}{1 - 0.18}$$

$$\Longrightarrow \boxed{P(\overline{A} \mid \overline{I}) = 0.3658}$$

Ejercicio 9 (2 *puntos*)

Un supermercado ha determinado que el tiempo que pasa un cliente en su establecimiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 3$ minutos.

a) (1 punto) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 1 minuto con un nivel de confianza del 95 %.

b) (1 punto) Suponga que $\mu = 32$ minutos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 16$ clientes el tiempo medio que han pasado en su establecimiento, $\overline{X}$, sea menor de 30.5 minutos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2024 - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Tiempo del cliente en el establecimiento (minutos)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 3)$$

a) $n = ? \qquad \& \qquad E < 1 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.95$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} < 1 \implies n > \left(1.96 \cdot \frac{3}{1}\right)^2 = 34.57 \implies \boxed{n = 35}$$

b) $X : \mathcal{N}(32, 3) \xrightarrow{n=16} \overline{X} : \mathcal{N} = \left(\underbrace{32}_{\mu}, \underbrace{\frac{3}{\sqrt{16}}}_{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}(32, 0.75)$

$$P(\overline{X} \leq 30.5) = P\left(Z \leq \frac{30.5 - 32}{0.75}\right) = P(Z \leq -2) = P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2)$$
$$= 1 - 0.9772 = 0.0228$$

Ejercicio 10 (2 *puntos*)

En un estudio sobre desarrollo sostenible de la OCDE se ha observado que el 20 % de los países son desarrollados. Si el país es desarrollado tiene una probabilidad del 5 % de tener una esperanza de vida inferior a 70 años, del 50 % de tener una esperanza de vida de 70 a 75 años y un 45 % esperanza de vida inferior a 70 años, del 50 % de teneer una esperanza vida de 70 a 75 años y un 45 % de que la esperanza de vida sea superior a los 75 años. Si el país no pertenece al grupo de los países desarrollados, esas probabilidades son 50 %, 40 % y 10 %, respectivamente. Eligiendo al azar un país, calcule la probabilidad de que:

a) (1 punto) La esperanza de vida sea inferior a 70 años.

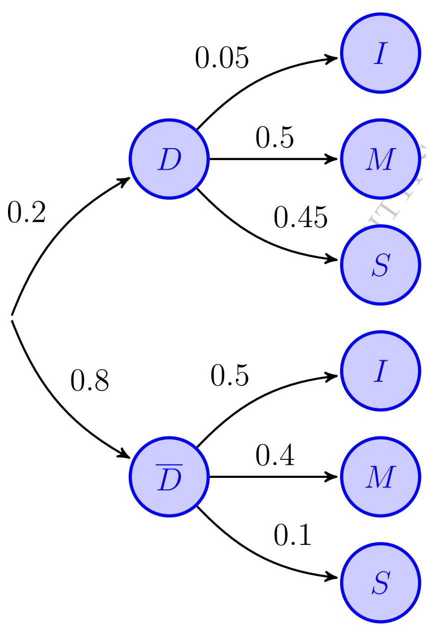
b) (1 punto) Sabiendo que la esperanza de vida es inferior a 70 años, el país no pertenezca al grupo de los países desarrollados.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2024 - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$$\begin{aligned} D &\equiv \text{“El país es desarrollado”} \\ I &\equiv \text{“La esperanza de vida es inferior a 70 años”} \\ M &\equiv \text{“La esperanza de vida está entre 70 y 75 años”} \\ S &\equiv \text{“La esperanza de vida es superior a 75 años”} \end{aligned}$$



a) $$\begin{aligned} P(I) &= P\big((D\cap I)\cup(\overline{D}\cap I)\big) \\ &= P(D\cap I) + P(\overline{D}\cap I) \\ &= P(D)\cdot P(I\mid D)\cdot P(\overline{D})\cdot P(I\mid \overline{D}) \\ &= 0.2\cdot 0.05 + 0.8\cdot 0.5 = 0.41 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(\overline{D}\mid I) &= \frac{P(\overline{D}\cap I)}{P(I)} = \frac{P(\overline{D})\cdot P(I\mid \overline{D})}{P(I)} \\ &= \frac{0.8\cdot 0.5}{0.41} = 0.9756 \end{aligned}$$