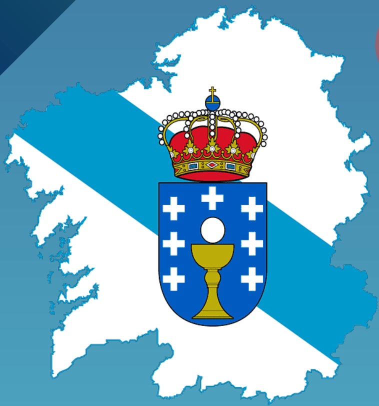
MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS



EVAU JUNIO 2024
- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2024

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Sean A y B dos matrices tales que $A+2B=\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $A+B=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) *(0.75 puntos) Calcule A^2.*

b) *(1.25 puntos) Calcule la matriz X que satisface la igualdad*

$$A^2X-(A+B)^\top=3I-2X$$

siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A+B)^\top$ la traspuesta de $(A+B)$.

(Galicia - Matemáticas II - Junio 2024 - Bloque Algebra)

Solución.

a) $B=(A+2B)-(A+B)=\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A+B=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \implies A=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \boxed{A^2=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

b) $A^2X-(A+B)^\top=3I-2X \implies A^2X+2X=3I+(A+B)^\top$

$\implies (A^2+2I)\cdot X=3I+(A+B)^\top$

$\implies \underbrace{\left(A^2+2I\right)^{-1}\cdot\left(A^2+2I\right)}_{I}\cdot X=(A^2+2I)^{-1}\cdot\left[3I+(A+B)^\top\right]$

$\implies \boxed{X=\left(A^2+2I\right)^{-1}\cdot\left[3I+(A+B)^\top\right]}$

$A^2+2I=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \implies (A^2+2I)^{-1}=\frac{1}{18}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

$3I+(A+B)^\top=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

$X=\frac{1}{18}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}=\frac{1}{18}\cdot\begin{pmatrix} 24 & -15 \\ -6 & 30 \end{pmatrix} \implies \boxed{X=\begin{pmatrix} 4/3 & -5/6 \\ -1/3 & 5/3 \end{pmatrix}}$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Discuta, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} mx + (m+2)y + z = 3 \\ 2mx + 3my + 2z = 5 \\ (m-4)y + mz = m \end{cases}$$

(Galicia - Matemáticas II - Junio 2024 - Bloque Algebra)

Solución.

Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m & m+2 & 1 & 3 \\ 2m & 3m & 2 & 5 \\ 0 & m-4 & m & m \end{array} \right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = m^2 \cdot (m-4) = 0 \implies m = \{0, 4\}$$

- Si $m \neq \{0,4\} \quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}\text{ incóg.} \xRightarrow{\textit{Rouche}}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $m = 0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{array} \right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{\textit{Rouche}}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

- Si $m = 4 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 1 & 3 \\ 8 & 12 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 12 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 24 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{\textit{Rouche}}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

> *a) (1 punto) Enuncie los teoremas de Rolle y de Bolzano.*
>
> *b) (1 punto) Calcule* $\displaystyle\int x^3 \cdot e^{x^2}\, dx$.
>
> *(Galicia - Matemáticas II - Junio 2024 - Bloque Análisis)*

Solución.

a)
- `Th. Rolle:` Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), que cumple que $f(a)=f(b)$ entonces existe al menos un punto $c \in (a,b) \mid f'(c)=0$.
- `Th. Bolzano:` Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ y $f(a)\cdot f(b) < 0$ entonces existe al menos un punto $c \in (a,b) \mid f(c)=0$.

b) $$\int x^3 \cdot e^{x^2}\, dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 \Rightarrow du = 2x\, dx \\ \\ dv = x \cdot e^{x^2}\, dx \Rightarrow v = \dfrac{1}{2}\cdot e^{x^2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2}\cdot e^{x^2} - \int \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}\cdot e^{x^2}\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\cdot e^{x^2} - \frac{1}{2}\cdot e^{x^2} + C = \frac{1}{2}\cdot (x^2-1)\cdot e^{x^2} + C$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

> *Calcule los siguientes límites:*
>
> *a) (1 punto)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \ln(1+x)}{x\cdot \operatorname{sen} x}$.
>
> *b) (1 punto)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{sen} x} - e^x}{x^2}$.
>
> *(Galicia - Matemáticas II - Junio 2024 - Bloque Análisis)*

Solución.

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \ln(1+x)}{x\cdot \operatorname{sen} x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \dfrac{1}{1+x}}{\operatorname{sen} x + x\cdot \cos x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x + \dfrac{1}{(1+x)^2}}{\cos x + \cos x - x\cdot \operatorname{sen} x} = \frac{0+1}{1+1-0} = \frac{1}{2}$$

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{sen} x} - e^x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{sen} x}\cdot \cos x - e^x}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{sen} x}\cdot \cos^2 x - e^{\operatorname{sen} x}\cdot \operatorname{sen} x - e^x}{2} = \frac{1-0-1}{2} = 0$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

a) *(1.25 puntos) Considere el plano* $\pi \equiv 4x + 2y + bz = 2$ *y la recta* $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-c}{2} = \dfrac{z-3}{4}$*, donde* b *y* c *son parámetros reales. Calcule los valores que tienen que tomar* b *y* c *para que la recta* r *esté contenida en* π*.*

b) *(0.75 puntos) Halle la distancia del punto* $P(1,3,1)$ *al plano* $\pi' \equiv 4x+2y-4z = 2$*.*

(Galicia - Matemáticas II - Junio 2024 - Bloque Geometría)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} R(2,c,3) \\ \vec{d_r} = (3,2,4) \end{cases} \Longrightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2+3\lambda \\ y = c+2\lambda \\ z = 3+4\lambda \end{cases}$$

a) $r \in \pi \iff \begin{cases} r \parallel \pi \Rightarrow \vec{d_r} \perp \vec{n}_\pi \Rightarrow (3,2,4)\cdot(4,2,b) = 12+4+4b = 0 \Rightarrow \boxed{b=-4} \\ R \in \pi \Longrightarrow 4\cdot 2 + 2c + 3b = 2 \xRightarrow{b=-4} \boxed{c=3} \end{cases}$

b) $d(P,\pi') = \dfrac{|4+6-4-2|}{\sqrt{16+4+16}} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}\ u$

Ejercicio 6 (2 *puntos*)

a) *(1 punto) Considérense los puntos* $Q(-1,3,-5)$, $R(3,1,0)$ *y* $S(0,1,2)$*. Obtenga la ecuación implícita o general del plano.* π *que contiene a* Q, R *y* S.

b) *(1 punto) Obtenga las ecuaciones paramétricas y la ecuación continua de la recta que pasa por el punto* $P(3,-1,-1)$ *y es perpendicular al plano* $\pi \equiv 4x+23y+6z-35=0$.

(Galicia - Matemáticas II - Junio 2024 - Bloque Geometría)

Solución.

$$\overrightarrow{QR}=(4,-2,5) \qquad \& \qquad \overrightarrow{QS}=(1,-2,7)$$

a) $$\pi \equiv \begin{cases} S(0,1,2) \\ \vec{u}=\overrightarrow{QR}=(4,-2,5) \\ \vec{v}=\overrightarrow{QS}=(1,-2,7) \end{cases} \Longrightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 4 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix}=0$$

$$\Longrightarrow -4x-23\cdot(y-1)-6\cdot(z-2)=0 \Longrightarrow \boxed{\pi \equiv 4x+23y+6z-35=0}$$

b) $$r \equiv \begin{cases} P(3,-1,-1) \\ \vec{d}_r=\vec{n}_\pi=(4,23,6) \end{cases} \Longrightarrow r \equiv \begin{cases} x=3+4\lambda \\ y=-1+23\lambda \\ z=-1+6\lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$r \equiv \frac{x-3}{4}=\frac{y+1}{23}=\frac{z+1}{6}$$

Ejercicio 7 (2 *puntos*)

Sabiendo que $P(A) = \dfrac{1}{3}$ *y* $P(B) = \dfrac{1}{2}$.

a) *(1 punto) Suponiendo que A y B son sucesos, independientes, calcule* $P(A \cup B)$ *y* $P\Big(\overline{A} \mid (\overline{A} \cup \overline{B})\Big)$

b) *(1 punto) Suponiendo que A y B son sucesos, incompatibles, calcule* $P(A \cup B)$ *y* $P\Big(\overline{A} \mid (\overline{A} \cup \overline{B})\Big)$

(Galicia - Matemáticas II - Junio 2024 - Bloque Probabilidad y Estadística)

Solución.

a) A y B independientes $\implies P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P\Big(\overline{A} \mid (\overline{A} \cup \overline{B})\Big) = \frac{P\Big(\overline{A} \cap (\overline{A} \cup \overline{B})\Big)}{P(\overline{A} \cup \overline{B})} = \frac{P(\overline{A})}{P(\overline{A \cap B})} = \frac{1 - P(A)}{1 - P(A \cap B)} = \frac{1 - 1/3}{1 - 1/6} = \frac{4}{5}$$

b) A y B incompatibles $\implies P(A \cap B) = 0$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 0 = \frac{5}{6}$$

$$P\Big(\overline{A} \mid (\overline{A} \cup \overline{B})\Big) = \frac{P\Big(\overline{A} \cap (\overline{A} \cup \overline{B})\Big)}{P(\overline{A} \cup \overline{B})} = \frac{P(\overline{A})}{P(\overline{A \cap B})} = \frac{1 - P(A)}{1 - P(A \cap B)} = \frac{1 - 1/3}{1 - 0} = \frac{2}{3}$$

Ejercicio 8 (2 *puntos*)

> *Una máquina que distribuye agua en botellas echa una cantidad de agua que sigue una distribución normal con media igual a* 500 *mililitros y desviación típica igual a* 4 *mililitros.*
>
> *a) (1 punto) Si elegimos al azar una de las botellas, ¿cuál es la probabilidad de que lleve entre* 499 *y* 502 *mililitros?*
>
> *b) (1 punto) ¿Cuál es la cantidad de agua, en mililitros, excedida por el* 97.5 % *de estas botellas?*
>
> *(Galicia - Matemáticas II - Junio 2024 - Bloque Probabilidad y Estadística)*

Solución.

$$X \equiv \text{“Cantidad de agua en la botella (ml)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(500, 4)$$

a) $$\begin{aligned} P(499 \leq X \leq 502) &= P\left(\frac{499-500}{4} \leq Z \leq \frac{502-500}{4}\right) = P(-0.25 \leq Z \leq 0.5) \\ &= P(Z \leq 0.5) - P(Z \leq -0.25) = P(Z \leq 0.5) - \left[1 - P(Z \leq 0.25)\right] \\ &= 0.6915 - (1 - 0.5987) = 0.2902 \end{aligned}$$

b) $$P(X \geq a) = P\left(Z \geq \frac{a-500}{4}\right) = 0.975 \implies P\left(Z \leq -\frac{a-500}{4}\right) = 0.975$$

$$\implies -\frac{a-500}{4} = 1.96 \implies \boxed{a = 492.16\ ml}$$