MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2024

- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2024 (Ordinario)
Bloque Análisis

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

La empresa "Plátanos Islas Canarias" se dedica a la producción de plátanos, un cultivo muy importante en las islas. Los costes de producción están dados por la función:

$$C(x) = \frac{3x}{5\sqrt{x^2+1}}\ ,\ x \geq 0$$

donde $C(x)$ son miles de euros, x miles de kilos de plátanos producidos. Responder a las siguientes preguntas:

a) *(0.5 puntos) Averiguar el coste de la producción de un kilo de plátanos.*

b) *(0.5 puntos) Si la empresa pudiera producir cantidades muy grandes de plátanos, ¿a qué valor tenderían los costes de producción de los plátanos?*

c) *(0.75 puntos) Un economista afirma que superada cierta cantidad de kilos producidos, el coste de producción disminuirá. Justificar la veracidad de la afirmación del economista.*

d) *(0.75 puntos) Calcular: $\int_0^4 C(x)\,dx$. Interpretar el resultado en el contexto del problema.*

(Islas Canarias - Matemáticas II - Junio 2024 - Bloque A)

Solución.

a) $C(0.001) = \dfrac{3\cdot 0.001}{5\sqrt{0.001^2+1}} = 0.0006$ miles de € $= 0.6$ €/kilo

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} C(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{5\sqrt{x^2+1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{3}{5\sqrt{1}} = \frac{3}{5} = 0.6 \implies 600€.$

Luego si aumentamos mucho la producción los costes tienden a estabilizarse en 600€.

c) $$C'(x) = \frac{15\sqrt{x^2+1} - \dfrac{15x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{25\cdot(x^2+1)} = \frac{3}{5\cdot\sqrt[3]{(x^2+1)^2}} > 0$$

Por lo tanto los costes de producción son siempre crecientes y la afirmación del economista no es cierta.

d) $$F(x) = \int \frac{3x}{5\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\int \underbrace{2x}_{u'}\cdot\underbrace{\left(x^2+1\right)^{-1/2}}_{u^{-1/2}} = \frac{3}{10}\cdot 2\cdot\left(x^2+1\right)^{1/2} + C$$

$$= \frac{3}{5}\cdot\sqrt{x^2+1} + C$$

$$\int_0^4 C(x)\,dx = F(4) - F(0) = \frac{3}{5}\cdot\left(\sqrt{17}-1\right) \simeq 1.874 \implies 1874€$$

Lo que significa que el coste medio de producción sería de $\dfrac{1874}{4-0} = 468.5$€/ton.

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Dada la función definida por: $f(x) = \dfrac{\ln(x+2)+a}{3x+4}$

a) *(1.25 puntos) Determinar el valor de a sabiendo que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$ es 10. Dar la expresión de la función.*

b) *(1.25 puntos) Para el valor $a = 0$, estudiar el dominio y las asíntotas de la función $f(x)$.*

(Islas Canarias - Matemáticas II - Junio 2024 - Bloque B)

Solución.

a) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x+2}\cdot(3x+4) - 3\cdot[\ln(x+2)+a]}{(3x+4)^2}$

$$m_r = f'(x_0) = f'(-1) = \frac{1-3a}{1} = 10 \implies \boxed{a=-3} \implies \boxed{f(x) = \frac{\ln(x+2)-3}{3x+4}}$$

b) Para $a = 0 \implies f(x) = \dfrac{\ln(x+2)}{3x+4}$

- `Dominio:` $\begin{cases} x+2>0 \implies x>-2 \\ 3x+4=0 \implies x=-\dfrac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \mathrm{Dom}(f) = (-2, -4/3)\cup(-4/3, +\infty)$

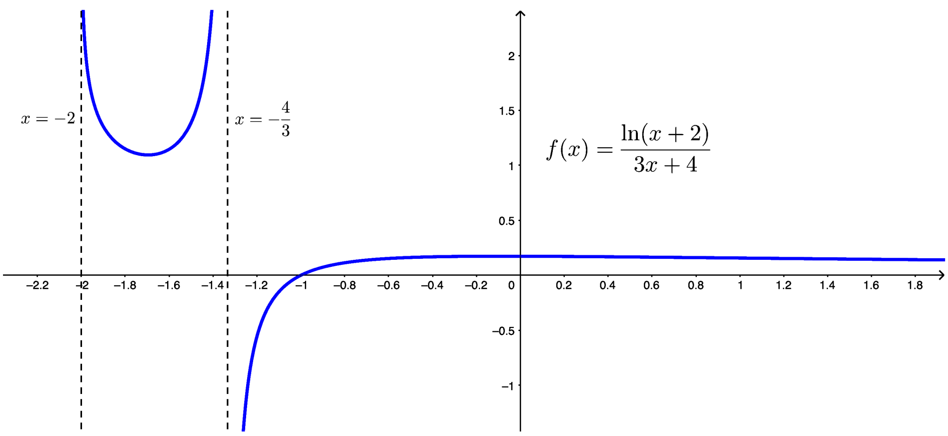
- `A. Vertical:` $\exists A.V.$ en $x = -2^+$ y en $x = -4/3$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{\ln(x+2)}{3x+4} = \left[\frac{-\infty}{-2}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\to -4/3} f(x) = \lim_{x\to -4/3} \frac{\ln(x+2)}{3x+4} = \left[\frac{\ln 5/4}{0}\right] = \begin{cases} \lim_{x\to -4/3^-} f(x) = \dfrac{\ln 2/3}{0^-} = +\infty \\ \lim_{x\to -4/3^+} f(x) = \dfrac{\ln 2/3}{0^+} = -\infty \end{cases}$$

- `A. Horizontal:` $\exists A.H.$ en $y = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x)\frac{\ln(x+2)}{3x+4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x+2}}{3} = 0$$



Bloque Algebra

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Resolver el siguiente sistema matricial:

$$\begin{cases} 5X - 4Y = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} \\ 4X - 6Y = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & -4 & -2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

(Islas Canarias - Matemáticas II - Junio 2024 - Bloque A)

Solución.

Llamamos: $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ & $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{lcr} 5X - 4Y = A & \xrightarrow{\times 3} & 15X - \cancel{12Y} = 3A \\ 4X - 6Y = B & \xrightarrow{\times(-2)} & -8X + \cancel{12Y} = -2B \\ \hline & & 7X = 3A - 2B \end{array} \Longrightarrow \boxed{X = \frac{1}{7} \cdot (3A - 2B)}$$

$$4X - 6Y = B \Longrightarrow \boxed{Y = \frac{1}{14} \cdot (4A - 5B)}$$

$$X = \frac{1}{7} \cdot \left[3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & -4 & -2 \end{pmatrix} \right] \Longrightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$Y = \frac{1}{14} \cdot \left[4 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & -4 & -2 \end{pmatrix} \right] \Longrightarrow \boxed{Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales, con un parámetro $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} kx + y - 3z = 5 \\ -x + y + z = -4 \\ kx + y - kz = 1 \end{cases}$$

a) (1.25 puntos) Discutir la resolución del sistema, según los valores del parámetro k.

b) (1.25 puntos) Resolver el sistema cuando $k = 4$.

(Islas Canarias - Matemáticas II - Junio 2024 - Bloque B)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ k & 1 & -k & 1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -k^2 + 2k + 3 = 0 \implies k = \{-1, 3\}$$

- Si $k \neq \{-1, 3\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $k = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 20 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

- Si $k = 3 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -16 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

b) Resolvemos el sistema para $k=4$, teniendo en cuenta que se trata de un S.C.D.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 4 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 4F_2+F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow 4x-3-3\cdot 4=5 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 5y+4=-11 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -z=-4 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x=5 \\ y=-3 \\ z=4 \end{array}}$$

Bloque Geometría

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

En el espacio tridimensional, tenemos el punto, la recta y el plano siguientes:

$$P(-7,3,4) \quad \& \quad r \equiv \begin{cases} x+y-1=0 \\ x+z+1=0 \end{cases} \quad \& \quad \pi \equiv x+2y-5z+5=0$$

a) (1.5 puntos) Encontrar el punto A intersección del plano π con la recta s. Esta recta s es una recta paralela a la recta r y que pasa por el punto P.

b) (1 punto) Hallar el ángulo que forma la recta r y el plano π.

(Islas Canarias - Matemáticas II - Junio 2024 - Bloque A)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} R(1,0,-2) \\ \vec{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,-1-1) \end{cases}$$

a) $s \equiv \begin{cases} P(-7,3,4) \\ \vec{d_s} = \vec{d_r} = (1,-1,-1) \end{cases} \implies s \equiv \begin{cases} x = -7+\lambda \\ y = 3-\lambda \\ z = 4-\lambda \end{cases}$

$$A = s \cap \pi \implies -7+\lambda+2\cdot(3-\lambda)-5\cdot(4-\lambda)+5=0 \xRightarrow{\lambda=4} \boxed{A(-3,-1,0)}$$

b) $\operatorname{sen}(\widehat{r,\pi}) = \dfrac{\left|\vec{d_r}\cdot\vec{n_\pi}\right|}{\left|\vec{d_r}\right|\cdot|\vec{n_\pi}|} = \dfrac{|(1,-1,-1)\cdot(1,2,-5)|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{30}} = \dfrac{|4|}{3\sqrt{10}} \implies \boxed{(\widehat{r,\pi}) = 24^\circ\ 56'\ 17''}$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

En el espacio tridimensional se conocen las ecuaciones de las rectas siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + z + 4 = 0 \end{cases} \qquad \& \qquad s \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

a) (1.5 puntos) Estudiar la posición relativa de las rectas r y s.

b) (1 punto) Encontrar el plano π, paralelo a la recta r y que contiene a la recta s.

(Islas Canarias - Matemáticas II - Junio 2024 - Bloque B)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} R(0,-3,-7) \\ \vec{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1,-5,-7) \end{cases} \qquad \& \quad s \equiv \begin{cases} S(3,0,1) \\ \vec{d_s} = (1,1,1) \end{cases} \qquad \& \quad \overrightarrow{RS} = (3,3,8)$$

a) $\dfrac{1}{1} \neq \dfrac{-5}{1} = \dfrac{-7}{1} \implies r \not\parallel s \implies r$ y s se cortan o se cruzan.

$$\left[\vec{d_r}, \vec{d_s}, \overrightarrow{RS}\right] = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 30 \neq 0 \implies r \text{ y } s \text{ se cruzan en el espacio.}$$

b) $$\pi \equiv \begin{cases} \pi \parallel r \\ s \in \pi \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} S(3,0,1) \\ \vec{u} = \vec{d_s}(1,1,1) \\ \vec{v} = \vec{d_r} = (1,-5,-7) \end{cases} \implies \pi \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\implies -2\cdot(x-3) + 8y - 6\cdot(z-1) = 0 \implies \boxed{\pi \equiv x - 4y + 3z - 6 = 0}$$

Bloque Probabilidad

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

En un avión de pasajeros se han instalado tres paracaídas A, B y C. Si falla A, se pone B en funcionamiento, y si también falla B, se activa el paracaídas C. Las probabilidades de que funcione correctamente cada paracaídas son, respectivamente, 0.96, 0.98 y 0.99.

a) (0.5 puntos) Dibujar un diagrama de árbol que refleje todos los posibles casos.

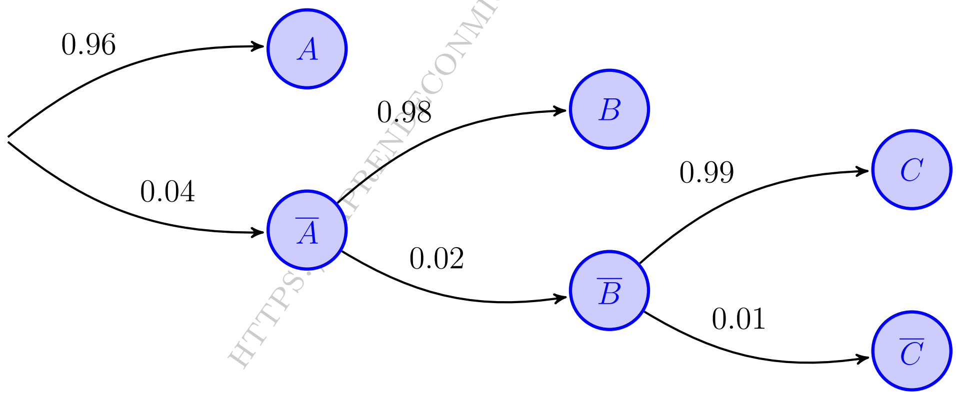
b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que se active el paracaídas B y funcione correctamente.

c) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que funcione algún paracaídas.

(Islas Canarias - Matemáticas II - Junio 2024 - Bloque A)

Solución.

a) Sean los sucesos: $A \equiv$ "El paracaídas A funciona tras activarse"
$B \equiv$ "El paracaídas B funciona tras activarse"
$C \equiv$ "El paracaídas C funciona tras activarse"



b) $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \cdot P(B \mid \overline{A}) = 0.04 \cdot 0.98 = 0.0392$

c) $$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) &= P(A) + P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \\ &= P(A) + P(\overline{A}) \cdot P(B \mid \overline{A}) + P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B} \mid \overline{A}) \cdot P\big(C \mid (\overline{A} \cap \overline{B})\big) \\ &= 0.96 + 0.04 \cdot 0.98 + 0.04 \cdot 0.02 \cdot 0.99 = 0.999992 \end{aligned}$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Un juego de ruleta tiene 25 *casillas numeradas del* 1 *al* 25*. Un jugador gana si sale un número par.*

a) (1.25 puntos) Si juega 100 *veces, calcular la probabilidad de que gane en más de la mitad de las ocasiones.*

b) (1.25 puntos) Si juega 200 *veces, un jugador afirma que la probabilidad de ganar entre* 90 *y* 110 *veces es menor que* $^3/_4$*. Justificar si esta afirmación es cierta o no.*

(Islas Canarias - Matemáticas II - Junio 2024 - Bloque B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Nº de partidas ganadas”} \xrightarrow{p=\frac{12}{25}=0.48} X : \mathcal{B}(n, 0.48)$$

a) $X = \mathcal{B}(100, 0.48) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} n = 100 > 20 \checkmark \\ np = 48 \checkmark \\ nq = 52 \checkmark \end{array}\right\} \Rightarrow Y : \mathcal{N}(\underbrace{48}_{np}, \underbrace{4.996}_{\sqrt{npq}})$

$$P(X > 50) = P(Y \geq 50.5) = P\left(Z \geq \frac{50.5 - 48}{4.996}\right) = P(Z \geq 0.5) = 1 - P(Z \leq 0.5)$$
$$= 1 - 0.6915 = 0.3085$$

b) $X = \mathcal{B}(200, 0.48) \left\{\begin{array}{l} n = 200 > 20 \checkmark \\ np = 96 \checkmark \\ nq = 104 \checkmark \end{array}\right\} \Rightarrow Y : \mathcal{N}(\underbrace{96}_{np}, \underbrace{7.065}_{\sqrt{npq}})$

Se entiende que los extremos 90 y 110 no están incluidos

$$P(90 < X < 110) = P(90.5 \leq Y \leq 109.5) = P\left(\frac{90.5 - 96}{7.065} \leq Z \leq \frac{109.5 - 96}{7.065}\right)$$
$$= P(-0.78 \leq Z \leq 1.91) = P(Z \leq 1.91) - P(Z \leq -0.78)$$
$$= P(Z \leq 1.91) - P(Z \geq 0.78) = P(Z \leq 1.91) - \left[1 - P(Z \leq 0.78)\right]$$
$$= 0.9719 - (1 - 0.7823) = 0.7542 > \frac{3}{4},$$ luego la afirmación no es correcta