MATEMATICAS II

EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2024

- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2024 (Ordinario)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Una fábrica de vino de Mallorca, produce 3 tipos de vino: tinto, blanco y rosado. Con la finalidad de saber el precio de cada tipo de vino, hemos comprado vino, el mismo día y en la misma fábrica, de 4 maneras diferentes:

- *Comprando 3 botellas de vino tinto y 2 de vino blanco hemos pagado 67€.*
- *Comprando 2 botellas de vino tinto, 4 de vino blanco y 1 de rosado hemos pagado 85€.*
- *Comprando 1 botella de vino tinto y 1 de vino rosado hemos pagado 21€, y finalmente,*
- *Comprando 4 botellas de vino blanco y 5 de vino rosado hemos pagado 85€.*

a) *(3 puntos) Escribe, en forma matricial, el sistema de ecuaciones lineales que se debería resolver para poder averiguar el precio de cada tipo de vino.*

b) *(2 puntos) ¿Es necesario tener los datos de las cuatro compras para saber el precio de cada tipo de vino?*

c) *(5 puntos) Calcula cuál es el precio de cada tipo de vino.*

(Islas Baleares - Matemáticas II - Junio 2024 - Bloque Algebra)

Solución.

a) Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{“Precio de la botella de vino tinto (€)”}$$
$$y \equiv \text{“Precio de la botella de vino blanco (€)”}$$
$$z \equiv \text{“Precio de la botella de vino rosado (€)”}$$

Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 67 \\ 2x + 4y + z = 85 \\ x + z = 21 \\ 4y + 5z = 85 \end{cases}$$

Escribimos el sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 67 \\ 85 \\ 21 \\ 85 \end{pmatrix}$$

b) Un sistema de ecuaciones con 3 incógnitas solo necesita 3 ecuaciones linealmente independientes para ser resuelto. Podríamos quedarnos con el siguiente sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 85 \\ 1 & 0 & 1 & 21 \\ 0 & 4 & 5 & 85 \end{array}\right), \text{ ya que } \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -24 \neq 0 \implies S.C.D.$$

c) Resolvemos el sistema de ecuaciones por el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 85 \\ 1 & 0 & 1 & 21 \\ 0 & 4 & 5 & 85 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 2F_2 - F_1 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 85 \\ 0 & -4 & 1 & -43 \\ 0 & 4 & 5 & 85 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 + F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 85 \\ 0 & -4 & 1 & -43 \\ 0 & 0 & 6 & 42 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow 2x + 4 \cdot 12.5 + 7 = 85 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -4y + 7 = -43 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 6z = 42 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 14 \text{ €} \\ y = 12.5 \text{ €} \\ z = 7 \text{ €} \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Consideramos las matrices A de dimensión 3×3 que satisfacen que $3A + I = A^2$, donde I es la matriz identidad de dimensión 3×3.

a) *(3 puntos) Calcula la expresión de la matriz inversa de A.*

b) *(3 puntos) Dada la ecuación matricial*

$$A + 3AX = 5I$$

donde A es una de las matrices del enunciado. Calcula, en función solo de la matriz A (no de su inversa) y de la identidad I, la matriz X. ¿Qué dimensión tiene la matriz X? Justifica la respuesta.

c) *(4 puntos) Calcula todas las matrices de la forma*

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Tales que cumplan las condiciones de enunciado.

(Islas Baleares - Matemáticas II - Junio 2024 - Bloque Algebra)

Solución.

a) $3A + I = A^2 \implies A^2 - 3A = I \implies A \cdot (A - 3I) = I \implies \boxed{A^{-1} = A - 3I}$

b) $A + 3AX = 5I \implies 3AX = 5I - A \implies 3\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot (5I - A)$

$$\implies 3X = 5A^{-1} - I = 5 \cdot (A - 3I) - I = 5A - 16I \implies \boxed{X = \frac{1}{3} \cdot (5A - 16I)}$$

La matriz X es diferencia entre dos matrices de dimensión 3, por lo que la matriz $X \in \mathcal{M}_{3\times 3}$.

c) Buscamos las matrices que cumplen $3A + I = A^2 \implies A \cdot (A - 3I) = I$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a-3 & 1 & 0 \\ 1 & b-3 & 0 \\ 0 & 0 & c-3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 - 3a + 1 & a + b - 3 & 0 \\ a + b - 3 & b^2 - 3b + 1 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 - 3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{cases} a^2 - 3a + 1 = 1 \implies a = \{0, 3\} \\ a + b - 3 = 0 \begin{cases} a = 0 \implies b = 3 \\ a = 3 \implies b = 0 \end{cases} \\ b^2 - 3b + 1 = 1 \implies b = \{0, 3\} \\ c^2 - 3c = 1 \implies c = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Luego todas las posibles matrices que cumplen las condiciones serían:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3-\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix} \quad \& \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3-\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3+\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix} \quad \& \quad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3+\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Consideremos los puntos $A(0,0,0)$, $B(2,-1,3)$ y $C(-1,2,1)$.

a) (3 puntos) Calcula el punto D tal que $ABDC$ es un paralelogramo.

b) (4 puntos) Calcula uno de los puntos E del espacio, de manera que la recta AE sea perpendicular al plano ABC y que la distancia entre A y E sea 1.

c) (3 puntos) Escribe la ecuación de uno de los planos paralelos al plano ABC que dista una unidad de éste.

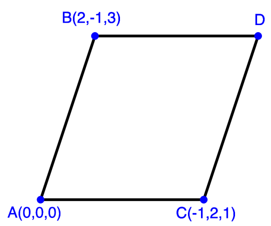
(Islas Baleares - Matemáticas II - Junio 2024 - Bloque Geometría)

Solución.

a) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$= (2, -1, 3) + (-1, 2, 1)$

$\implies \boxed{D(1, 1, 4)}$



b) $\pi_{ABC} = \begin{cases} A(0,0,0) \\ \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2,-1,3) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-1,2,1) \end{cases} \implies \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$\implies \pi \equiv 7x + 5y - 3z = 0$$

$$\overrightarrow{AE} \perp \pi \implies \overrightarrow{AE} = k \cdot \vec{n}_\pi = k \cdot (7,5,-3)$$

$$d(A,E) = \left|\overrightarrow{AE}\right| = |k \cdot (7,5,-3)| = |k| \cdot \sqrt{83} = 1 \implies |k| = \frac{1}{\sqrt{83}} \implies k = \pm\frac{1}{\sqrt{83}}$$

$$\implies E\left(\frac{7}{\sqrt{83}}, \frac{5}{\sqrt{83}}, -\frac{3}{\sqrt{83}}\right) \qquad \& \qquad E'\left(-\frac{7}{\sqrt{83}}, -\frac{5}{\sqrt{83}}, \frac{3}{\sqrt{83}}\right)$$

c) El plano $\pi' \parallel \pi$ tal que $d(\pi, \pi') = 1$ tiene que pasar por el punto E hallado en el apartado anterior.

$$\pi' \equiv 7x + 5y - 3z + D = 0 \xRightarrow{E \in \pi'} \frac{49}{\sqrt{83}} + \frac{25}{\sqrt{83}} + \frac{9}{\sqrt{83}} + D = 0 \implies D = -\sqrt{83}$$

$$\implies \boxed{\pi' \equiv 7x + 5y - 3z - \sqrt{83} = 0}$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

a) (5 puntos) Discute, según los valores de a y b (parámetro reales), la posición relativa de los planos

$$\pi_1 \equiv 3x + ay - z = 1 \qquad \& \qquad \pi_2 \equiv 6x + y - 2z = b$$

Es decir, si son coincidentes, paralelos o se cortan. En el último caso, especifica si lo hacen perpendicularmente.

b) (5 puntos) Calcula la ecuación de la recta perpendicular al plano π y que pasa por el punto de corte entre la recta s y el mismo plano π, siendo

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 2 + 4\alpha - \beta \\ y = 3\beta \\ z = 1 + \alpha \end{cases} \qquad \& \qquad s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

para α y β valores reales cualesquiera.

(Islas Baleares - Matemáticas II - Junio 2024 - Bloque Geometría)

Solución.

a) $\dfrac{3}{6} = \dfrac{a}{1} = \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{1}{b} \implies \begin{cases} \dfrac{3}{6} = \dfrac{a}{1} \implies 3 = 6a \implies a = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{a}{1} = \dfrac{-1}{-2} \implies -2a = -1 \implies a = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{1}{b} \implies -b = -2 \implies b = 2 \end{cases}$

- Si $a=\dfrac{1}{2} \quad \& \quad b=2 \implies \pi_1 \equiv \pi_2$
- Si $a=\dfrac{1}{2} \quad \& \quad b\neq 2 \implies \pi_1 \parallel \pi_2$
- Si $a\neq\dfrac{1}{2} \implies \pi_1 \cap \pi_2$

$$\vec{n}_{\pi_1}\cdot\vec{n}_{\pi_2}=(3,a,-1)\cdot(6,1,-2)=18+a+2=0 \implies a=-20$$

  - Si $a=-20 \implies \pi_1 \perp \pi_2$
  - Si $a\neq\{-20,{}^1\!/_2\} \implies$ los planos se cortan con un ángulo distinto de 90°

b) $\pi\equiv\begin{cases}P(2,0,1)\\ \vec{u}=(4,0,1)\\ \vec{v}=(-1,3,0)\end{cases} \Rightarrow \pi=\begin{vmatrix}x-2 & y & z-1\\ 4 & 0 & 1\\ -1 & 3 & 0\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \pi\equiv -3x-y+12z-6=0$

$$s\equiv\begin{cases}S(1,0,1)\\ \vec{d}_s=(2,2,-1)\end{cases} \implies s\equiv\begin{cases}x=1+2\lambda\\ y=2\lambda\\ z=1-\lambda\end{cases}$$

$$R=s\cap\pi \implies -3\cdot(1+2\lambda)-2\lambda+12\cdot(1-\lambda)-6=0 \xRightarrow{\lambda={}^3\!/_{20}} R\left(\tfrac{13}{10},\tfrac{3}{10},\tfrac{17}{20}\right)$$

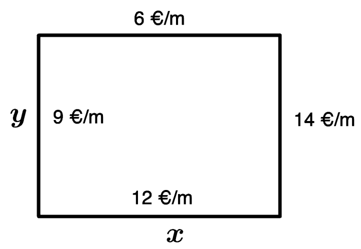
$$r\equiv\begin{cases}r\perp\pi\\ R\in r\end{cases} \Rightarrow r\equiv\begin{cases}R\left(\tfrac{13}{10},\tfrac{3}{10},\tfrac{17}{20}\right)\\ \vec{d}_r=\vec{n}_\pi=(-3,-1,12)\end{cases} \Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=\tfrac{13}{10}-3\lambda\\ y=\tfrac{3}{10}-\lambda\\ z=\tfrac{17}{20}+12\lambda\end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R}$$

Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)

Queremos vallar un campo rectangular utilizando diferentes materiales en cada lado. Empezando por el fondo del campo y moviéndonos alrededor de éste, en el sentido contrario a las agujas del reloj, el coste del material para cada lado es de 6€/m, 9€/m, 12€/m y 14€/m, respectivamente. Si tenemos que gastar exactamente. 1000€ para comprar el material del cercado, determina las dimensiones del campo que maximizan el área encerrada.

(Islas Baleares - Matemáticas II - Junio 2024 - Bloque Análisis)

Solución.



$$\left.\begin{cases} C = x\cdot(12+6) + y\cdot(9+14) = 1000 \Rightarrow y = \dfrac{1000-18x}{23} \\ S(x,y) = xy \end{cases}\right\} \Rightarrow S(x) = \frac{1000x - 18x^2}{23}$$

$$C'(x) = \frac{1000-36x}{23} = 0 \implies 1000 - 36x = 0 \implies x = \frac{250}{9} \simeq 27.78$$

$$C''(x) = -\frac{36}{23} \implies C''(250/9) = -\frac{36}{23} < 0 \overset{(\cap)}{\implies} \text{Máximo en } x = \frac{250}{9}$$

Por lo tanto las dimensiones del campo que maximizan su superficie son:

$$x = \frac{250}{9} \simeq 27.78 \qquad \& \qquad y = \frac{1000 - 18\cdot\frac{250}{9}}{23} = \frac{500}{23} \simeq 21.74$$

Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} be^x + a + 1 & , \text{ si } x \leq 0 \\ ax^2 + b \cdot (x+3) & , \text{ si } 0 < x \leq 1 \\ a \cdot \cos(\pi x) + 7bx & , \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

a) (5 puntos) Calcula los valores a y b para que la función $f(x)$ sea continua.

b) (5 puntos) Sea $a = 3$ y $b = 2$, calcula el área comprendida entre $x = -1$, $x = 0$ y el eje OX.

(Islas Baleares - Matemáticas II - Junio 2024 - Bloque Análisis)

Solución.

a)
- `Dominio:` $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- `Continuidad en` $x = 0$:
  - $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (be^x + a + 1) = b + a + 1$
  - $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left[ax^2 + b \cdot (x+3)\right] = 3b$
  - $f(0) = b + a + 1$

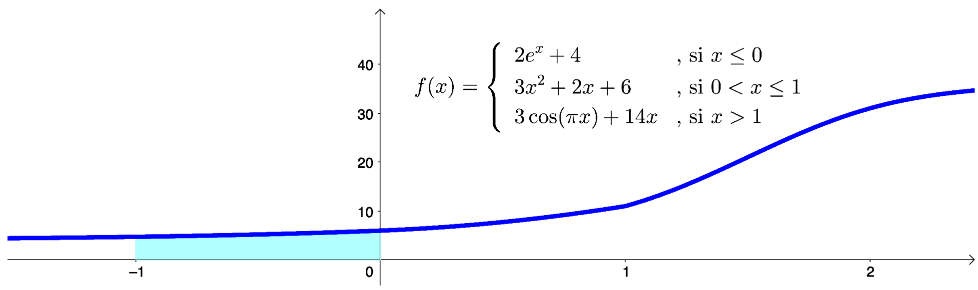
  $f(x)$ es continua en $x = 0 \iff \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) \xRightarrow{b+a+1=3b} a = 2b - 1$ ⊙
- `Continuidad en` $x = 1$:
  - $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \left[ax^2 + b \cdot (x+3)\right] = a + 4b$
  - $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} [a \cdot \cos(\pi x) + 7bx] = 7b - a$
  - $f(1) = a + 4b$

  $f(x)$ es continua en $x = 1 \iff \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) \xRightarrow{7b-a=a+4b} a = \dfrac{3b}{2}$ ⊛

$$\begin{cases} \odot \; a = 2b - 1 \\ \circledast \; a = \dfrac{3b}{2} \end{cases} \implies \boxed{\begin{matrix} a = 3 \\ b = 2 \end{matrix}}$$

b) Para $a = 3$ y $b = 2$, entre las rectas $x = -1$ y $x = 0$, $f(x) = 2e^x + 4 > 0 \implies \nexists$ Pto. corte con OX. Esto define un único recinto de integración $A : (-1, 0)$

$$A = \int_{-1}^{0} f(x)\, dx = \int_{-1}^{0} (2e^x + 4)\, dx = 2e^x + 4x]_{-1}^{0} = 2 - \left(\frac{2}{e} - 4\right) = \frac{6e - 2}{e} \simeq 5.26 \; u^2$$



Ejercicio 7 (2.5 *puntos*)

Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral tales que satisfacen que

$$P(A \cup B) = 0.7 \qquad \& \qquad P(A \cap B) = 0.1 \qquad \& \qquad P(A \cap \overline{B}) = 0.35$$

(siendo $\overline{B}$ el suceso complementario de B), calcula:

a) *(3 puntos) $P(A)$.*

b) *(3 puntos) $P(B)$.*

c) *(2 puntos) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$.*

d) *(2 puntos) ¿Son A y B sucesos independientes?*

(Islas Baleares - Matemáticas II - Junio 2024 - Bloque Probabilidad)

Solución.

a) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - 0.1 = 0.35 \implies \boxed{P(A) = 0.45}$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.45 + P(B) - 0.1 = 0.7 \implies \boxed{P(B) = 0.35}$

c) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.1 \implies \boxed{P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0.9}$

d) $$\left.\begin{array}{l} P(A) \cdot P(B) = 0.45 \cdot 0.35 = 0.1575 \\ P(A \cap B) = 0.1 \end{array}\right\} \implies \left| \begin{array}{c} P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \\ A \text{ y } B \text{ no son independientes} \end{array}\right.$$

Ejercicio 8 (2.5 *puntos*)

La duración de los embarazos humanos desde la concepción hasta el nacimiento se aproxima a una distribución normal con una media de 266 días y una desviación típica de 16 días,

a) (4 puntos) ¿Qué proporción de todos los embarazos durará entre 240 y 270 días (aproximadamente entre 8 y 9 meses)?

b) (6 puntos) Si nos fijamos en el 70 % de los embarazos que más duran, ¿cuál es su duración?

(Islas Baleares - Matemáticas II - Junio 2024 - Bloque Probabilidad)

Solución.

$$X \equiv \text{“Duración del embarazo hasta la concepción (días)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(266, 16)$$

a) $$\begin{aligned} P(240 \leq X \leq 270) &= P\left(\frac{240-266}{16} \leq Z \leq \frac{270-266}{16}\right) = P(-1.63 \leq Z \leq 0.25) \\ &= P(Z \leq 0.25) - P(Z \leq -1.63) = P(Z \leq 0.25) - P(Z \geq 1.63) \\ &= P(Z \leq 0.25) - \Big[1 - P(Z \leq 1.63)\Big] = 0.5987 - (1 - 0.9484) \\ &= 0.5471 \implies 54.71\,\% \end{aligned}$$

b) $$P(X \geq a) = P\left(X \geq \frac{a-266}{16}\right) = P\left(X \leq -\frac{a-266}{16}\right) = 0.7$$

$$\overset{Tabla}{\Longrightarrow} -\frac{a-266}{16} = 0.525 \implies \boxed{a = 257.6 \text{ días}}$$

Por lo tanto el 70 % de los embarazos que más duran, tendrán una duración de más de 257.6 días.