# MATEMATICAS II
# EXAMENES RESUELTOS

# EVAU JULIO 2023
## - Extraordinario -



https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

# Julio 2023 (Extraordinario)

**Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)**

*Se quiere calcular un número de tres cifras con los siguientes datos:*

I) *La suma de sus tres cifras es nueve.*

II) *Si permutamos la cifra de las centenas, con la cifra de las unidades, el número obtenido es el número inicial menos* 99 .

III) *Si permutamos la cifra de las decenas, con la cifra de las unidades, el número obtenido es el número inicial más* 36.

a) *(1.5 puntos) Denotando por $x$ la cifra de las centenas, $y$ la de las decenas y por $z$ la de las unidades, plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que represente la información dada en I), II) y III).*

b) *(1 punto) Calcule el número en cuestión.*

*(Región de Murcia - Matemáticas II - Julio 2023)*



**Solución.**

Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{“Cifra de las centenas”}$$
$$y \equiv \text{“Cifra de las decenas”}$$
$$z \equiv \text{“Cifra de las unidades”}$$

a) Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} x+y+z=9 \\ 100z+10y+x=100x+10y+z-99 \\ 100x+10z+y=100x+10y+z+36 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=9 \\ x-z=1 \\ y-z=-4 \end{cases}$$

b) Resolvemos el sistema de ecuaciones por el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2-F_1 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3+F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & -12 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x+0+4=9 \\ \Rightarrow -y-2\cdot 4=-8 \\ \Rightarrow -3z=-12 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=5 \\ y=0 \\ z=4 \end{array}}$$

**Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)**

*Se dice que una matriz cuadrada $A$ es 2-nilpotente si $A^2 = \mathcal{O}$.*

*a) (0.75 puntos) Justifica razonadamente que una matriz 2-nilpotente nunca puede ser regular (o invertible).*

*b) (0.75 puntos) Compruebe que la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ es 2-nilpotente.*

*c) (1 punto) Determine para qué valores $a$ y $b$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & a \\ 4 & b \end{pmatrix}$ es 2-nilpotente.*

*(Región de Murcia - Matemáticas II - Julio 2023)*

**Solución.**

a) $A$ es 2-nilpotente $\Rightarrow A^2 = \mathcal{O} \Rightarrow |A^2| = |\mathcal{O}| \implies |A|^2 = 0 \implies |A| = 0 \implies \nexists A^{-1}$

b) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{O} \implies A$ es 2-nilpotente

c) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & a \\ 4 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & a \\ 4 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36+4a & 6a+ab \\ 24+4b & 4a+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\implies \begin{cases} 36 + 4a = 0 \implies \boxed{a = -9} \\ 6a + ab = 0 \xRightarrow{a=-9} \boxed{b = -6} \\ 24 + 4b = 0 \xRightarrow[b=-6]{a=-9} 0 = 0 \checkmark \\ 4a + 2b = 0 \xRightarrow[b=-6]{a=-9} 0 = 0 \checkmark \end{cases} \implies \boxed{A = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}}$$

**Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)**

*Considere la función $f(x) = x \cdot e^{-x}$, definida para todo valor de $x \in R$.*

*a) (0.75 puntos) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.*

*b) (0.75 puntos) Calcule la derivada de $f(x)$ y determine los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de $f(x)$ y sus extremos relativos. (máximos y/o mínimos).*

*c) (1 punto) Calcule la integral indefinida de la función $f(x)$.*

*(Región de Murcia - Matemáticas II - Julio 2023)*

**Solución.**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x \cdot e^{-x} = [\infty \cdot 0] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$

b) $f'(x) = e^{-x} - x \cdot e^{-x} = (1 - x) \cdot e^{-x} = 0 \implies \begin{cases} 1 - x = 0 \implies x = 1 \\ e^{-x} = 0 \implies \nexists \text{ Solución} \end{cases}$

| | $(-\infty, 1)$ | $(1, +\infty)$ |
|---|---|---|
| Signo $f'(x)$ | $+$ | - |
| $f(x)$ | Creciente $\nearrow$ | Decreciente $\searrow$ |

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, 1)$ y *decreciente* en $(1, +\infty)$, y tiene un *máximo relativo* en $(1, {}^1/_e)$.

c) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \int x \cdot e^{-x}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x}\,dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{array} \right\} = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x}\,dx$

$= -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + C = -e^{-x} \cdot (x + 1) + C$

**Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)**

*Considere la función* $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}$, *definida para todo valor* $x \in \mathbb{R}$.

a) *(1 punto) Calcule la integral indefinida de la función* $f(x)$.

b) *(0.75 puntos) Calcule la integral* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$.

c) *(0.75 puntos) Determine la primitiva de* $f(x)$ *que pasa por el punto* $(\pi, 1)$.

*(Región de Murcia - Matemáticas II - Julio 2023)*

**Solución.**

a) $$F(x) = \int f(x)\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \cos x \Rightarrow dt = -\operatorname{sen} x\,dx \\ dx = \dfrac{-dt}{\operatorname{sen} x} \end{array} \right\}$$

$$= \int \frac{\cancel{\operatorname{sen} x}}{1+t^2} \cdot \frac{-dt}{\cancel{\operatorname{sen} x}} = -\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = -\arctan t + C = -\arctan(\cos x) + C$$

b) $$\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx = F(\pi/2) - F(0) = -\arctan\left(\cos\frac{\pi}{2}\right) + \arctan(\cos 0)$$

$$= -\arctan(0) + \arctan(1) = -0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

c) $F(\pi) = 1 \implies -\arctan(\cos\pi) + C = 1 \implies C = 1 + \arctan(-1)$

$$\implies \begin{cases} C = 1 + \dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{4+3\pi}{4} \implies \boxed{F(x) = -\arctan(\cos x) + \dfrac{4+3\pi}{4}} \\ C = 1 + \dfrac{7\pi}{4} = \dfrac{4+7\pi}{4} \implies \boxed{F(x) = -\arctan(\cos x) + \dfrac{4+7\pi}{4}} \end{cases}$$

**Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)**

*Los puntos $A(6,-4,4)$ y $B(12,-1,1)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice $C$ es la proyección ortogonal de $A$ sobre la recta*

$$r \equiv \begin{cases} x - 2y = 5 \\ x + 2z = 5 \end{cases}$$

a) *(1.5 puntos) Calcule las coordenadas del vértice $C$.*

b) *(0.5 puntos) Determine si el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ tiene un ángulo recto en el vértice $A$.*

c) *(0.5 puntos) Calcule el área del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$.*

*(Región de Murcia - Matemáticas II - Julio 2023)*

**Solución.**



$$r \equiv \begin{cases} R(5,0,0) \\ \vec{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-4,-2,2) \approx (2,1,-1) \end{cases} \Longrightarrow r \equiv \begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

a) $$\pi \equiv \begin{cases} A(6,-4,4) \\ \vec{n}_\pi = \vec{d_r} = (2,1,-1) \end{cases} \Longrightarrow 2x + y - z + D = 0 \xrightarrow{A \in \mathbb{R}} 12 - 4 - 4 + D = 0$$

$$\xrightarrow{D=-4} \pi \equiv 2x + y - z - 4 = 0$$

$$C = r \cap \pi \implies 2 \cdot (5 + 2\lambda) + \lambda - (-\lambda) - 4 = 0 \implies \lambda = -1 \implies \boxed{C = (3,-1,1)}$$

b) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \implies (6,3,-3) \cdot (-3,3,,-3) = -18 + 9 + 9 = 0$ q.e.d.

c) $$\text{Área}_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot |(0,-27,27)| = \frac{27\sqrt{2}}{2}\ u^2$$

**Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)**

*Considere el plano $\pi$ de ecuación $\pi \equiv 2x + ay - 2z = -4$ y la recta $r$ dada por*

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{-2}$$

*a) (1.25 puntos) Estudie la posición relativa del plano $\pi$ y de la recta $r$ en función del parámetro $a$.*

*Se sabe que cuando $a = 1$ la recta $r$ corta al plano $\pi$. Para ese valor de $a$:*

*b) (0.75 puntos) Calcule el punto de corte de la recta $r$ y el plano $\pi$.*

*c) (0.5 puntos) Calcule el ángulo que forman.*

*(Región de Murcia - Matemáticas II - Julio 2023)*

**Solución.**

$$r \equiv \begin{cases} R(-1,-1,5) \\ \vec{d_r} = (2,1,-2) \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 5 - 2\lambda \end{cases} \quad \& \quad \vec{n}_\pi = (2, a, -2)$$

a) $\vec{d_r} \cdot \vec{n}_\pi = (2,1,-2) \cdot (2,a,-2) = 4 + a + 4 = 0 \implies a = -8$

- Si $a \neq -8 \implies r \cap \pi$ y recta y plano se cortan en un punto
- Si $a = -8 \implies \left\{ \begin{array}{c} r \parallel \pi \\ r \in \pi \end{array} \right\} \xrightarrow{¿R\in\pi?} -2 + 8 - 10 = -4 \implies R \in \pi \implies r \in \pi$

b) Para $a = 1 \implies \pi \equiv 2x + y - 2z = -4$

$P = r \cap \pi \implies 2 \cdot (-1 + 2\lambda) - 1 + \lambda - 2 \cdot (5 - 2\lambda) = -4 \xrightarrow{\lambda=1} \boxed{P(1,0,3)}$

c) $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{\left|\vec{d_r} \cdot \vec{n}_\pi\right|}{\left|\vec{d_r}\right| \cdot |\vec{n}_\pi|} = \dfrac{|(2,1,-2)\cdot(2,1,-2)|}{3 \cdot 3} = \dfrac{|4+1+4|}{9} = 1 \implies \boxed{\alpha = 90°}$

**Ejercicio 7 (2.5 *puntos*)**

*En un cine hay 3 salas y un total de 250 espectadores, repartidos de la siguiente manera: 100 espectadores en la sala $A$, 50 en la sala $B$ y 100 en la sala $C$. Se sabe que la película de la sala $A$ gusta al 80 % de los espectadores, la de la sala $B$ al 20 % de los espectadores y la de la sala $C$ al 60 % de los espectadores. A la salida de las tres películas, se elige un espectador al azar. Calcule:*

*a) (0.25 puntos) La probabilidad de que el espectador haya estado en la sala $C$.*

*b) (0.5 puntos) La probabilidad de que le haya gustado la película, sabiendo que ha estado en la sala $C$.*

*c) (0.5 puntos) La probabilidad de que le haya gustado la película y haya estado en la sala $C$.*

*d) (0.75 puntos) La probabilidad de que le haya gustado la película.*

*e) (0.5 puntos) La probabilidad de que le haya gustado la película o haya estado en la sala $C$.*

*(Región de Murcia - Matemáticas II - Julio 2023)*

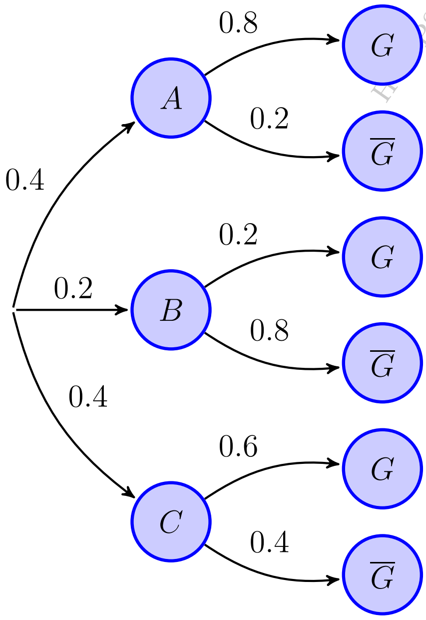


**Solución.**

Sean los sucesos:

$A \equiv$ "La película se proyecta en la sala $A$" $B \equiv$ "La película se proyecta en la sala $B$"
$C \equiv$ "La película se proyecta en la sala $C$" $G \equiv$ "Al espectador le gusta la película"

$$P(A) = \frac{100}{250} = 0.4 \qquad P(A) = \frac{50}{250} = 0.2 \quad \& \quad P(C) = \frac{100}{250} = 0.4$$




a) $P(C) = 0.4$

b) $P(G \mid C) = 0.6$

c) $P(G \cap C) = P(C) \cdot P(G \mid C) = 0.5 \cdot 0.6 = 0.24$

d)
$$\begin{aligned} P(G) &= P\big((A \cap G) \cup (B \cap G) \cup (C \cap G)\big) \\ &= P(A \cap G) + P(B \cap G) + P(C \cap G) \\ &= P(A) \cdot P(G \mid A) + P(B) \cdot P(G \mid B) \\ &+ P(C) \cdot P(G \mid C) = 0.4 \cdot 0.8 \\ &+ 0.2 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.6 = 0.6 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} P(G \cup C) &= P(G) + P(C) - P(G \cap C) \\ &= 0.6 + 0.4 - 0.24 = 0.76 \end{aligned}$$

**Ejercicio 8 (2.5 *puntos*)**

*En este ejercicio trabaje con cuatro decimales para las probabilidades y dos decimales para los porcentajes. El peso de los recién nacidos en la región de Murcia. Sigue una distribución normal de media $\mu$ y desviación típica $\sigma$ desconocidas. Se sabe que el 67 % de los recién nacidos, pesan menos de 3.464 kg y que el 1.5 % de los recién nacidos pesan más de 4.502 kg.*

*a) (0.5 puntos) ¿Cuál es el porcentaje de recién nacidos cuyo peso está comprendido entre 3.464 y 4.502 kg?*

*b) (1 punto) Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.*

*c) (1 punto) Calcule el porcentaje de recién nacidos que pesan menos de 2.33 kg.*

*(Región de Murcia - Matemáticas II - Julio 2023)*

**Solución.**

$$X \equiv \text{“Peso de los recién nacidos (kg)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, \sigma)$$

Del enunciado tenemos:

$$P(X < 3.464) = 0.67 \quad \& \quad P(X > 4.502) = 0.015 \Rightarrow P(X < 4.502) = 1 - 0.015 = 0.985$$

a) $P(3.464 < X < 4.502) = P(X < 4.502) - P(X < 3.464)$
$= 0.985 - 0.67 = 0.315 \implies 31.5\,\%$

b) $P(X < 3.464) = P\left(Z < \dfrac{3.464 - \mu}{\sigma}\right) = 0.67 \xRightarrow{Tabla} \dfrac{3.464 - \mu}{\sigma} = 0.44$

$\implies \mu = 3.464 - 0.44\sigma$ ⦿

$P(X < 4.502) = P\left(Z < \dfrac{4.502 - \mu}{\sigma}\right) = 0.985 \xRightarrow{Tabla} \dfrac{4.502 - \mu}{\sigma} = 2.17$

$\implies \mu = 4.502 - 2.17\sigma$ ⊛

$$\left.\begin{array}{l} ⦿\ \mu = 3.464 - 0.44\sigma \\ ⊛\ \mu = 4.502 - 2.17\sigma \end{array}\right\} \implies \boxed{\begin{array}{c} \mu = 3.2 \\ \sigma = 0.6 \end{array}}$$

c) $P(X < 2.33) = P\left(Z < \dfrac{2.33 - 3.2}{0.6}\right) = P(Z < -1.45) = P(Z > 1.45)$
$= 1 - P(Z < 1.45) = 1 - 0.9265 = 0.0735 \implies 7.35\,\%$