# MATEMATICAS II
# EXAMENES RESUELTOS

# EVAU JUNIO 2024
## - Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

# Junio 2024

## Opción A

**Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)**

*Se tienen listones de madera de tres longitudes diferentes: largos, intermedios y cortos. Puestos uno tras otro, tanto con dos listones largos y cuatro intermedios como con tres intermedios y quince cortos, se consigue la misma longitud total. Un listón largo supera en 17 cm la medida de uno intermedio más uno corto. Y con nueve listones cortos, hemos de añadir 7 cm para igualar la longitud de uno intermedio seguido por uno largo. Se pide calcular la longitud de cada tipo de listón.*

*(Madrid - Matemáticas II - Junio 2024 - Opción A)*

**Solución.**

Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{“Longitud de los listones largos (cm)”}$$
$$y \equiv \text{“Longitud de los listones itemedios (cm)”}$$
$$z \equiv \text{“Longitud de los listones cortos (cm)”}$$

$$\begin{cases} 2x+4y=3y+15z \\ x=y+z+17 \\ 9z+7=y+x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x-y-z=17 \\ 2x+y-15z=0 \\ x+y-9z=7 \end{cases}$$

$$A/A^{*}*=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -1 & 17 \\ 2 & 1 & -15 & 0 \\ 1 & 1 & -9 & 7 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2-2F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -1 & 17 \\ 0 & 3 & -13 & -34 \\ 0 & 2 & -8 & -10 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 3F_3-2F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -1 & 17 \\ 0 & 3 & -13 & -34 \\ 0 & 0 & 2 & 38 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x-71-19=17 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 3y-13\cdot 19=-34 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2z=38 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=107 \\ y=71 \\ z=19 \end{array}}$$

**Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)**

*Para la función* $f(x) = x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4$*, se pide:*

*a) (0.5 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de* $f(x)$ *en* $x = \pi$.

*b) (1 punto) Probar que* $f(x)$ *tiene, al menos un punto con derivada nula en el intervalo* $(-\pi, 0)$ *utilizando justificadamente el teorema de Rolle. Probar de nuevo la misma afirmación utilizando adecuadamente, esta vez, el teorema de Bolzano.*

*c) (1 punto) Si* $g(x) = f(-x)$*, calcular el área entre las gráficas de* $f(x)$ *y* $g(x)$ *en el intervalo* $[0, \pi]$.

*(Madrid - Matemáticas II - Junio 2024 - Opción A)*

**Solución.**

a)
- $x_0 = \pi \implies y_0 = f(x_0) = f(\pi) = 5\pi^4 \implies (x_0, y_0) = (\pi, 5\pi^4)$
- $f'(x) = 4x^3 + 3\pi x^2 + 2\pi^2 x + \pi^3$
- $m_r = f'(x_0) = f'(\pi) = 10\pi^3$
- $r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \Rightarrow y - 5\pi^4 = 10\pi^3 \cdot (x - \pi) \implies \boxed{r \equiv y = 10\pi^3 x - 5\pi^4}$

b) $f(x) = x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4 \quad \& \quad f'(x) = 4x^3 + 3\pi x^2 + 2\pi^2 x + \pi^3$

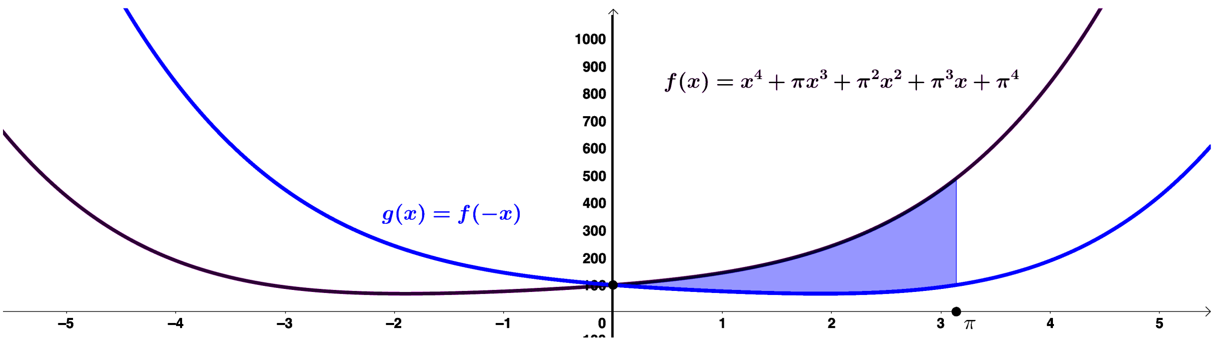
- $f(x)$ es continua en $[-\pi, 0]$ y derivable en $(-\pi, 0)$ (por ser polinomios), además $f(-\pi) = f(0) = \pi^4 \xRightarrow[\text{Rolle}]{\text{Th.}} \exists$ al menos $c \in (-\pi, 0)$ tal que $f'(c) = 0$ q.e.d.
- $f'(x)$ es continua en $[-\pi, 0]$ (por ser un polinomio), además $f'(-\pi) = -2\pi^3 < 0$ $\& \quad f'(0) = \pi^3 > 0 \xRightarrow[\text{Bolzano}]{\text{Th.}} \exists$ al menos un $c \in (-\pi, 0)$ tal que $f'(c) = 0$ q.e.d.

c) $f(x) = x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4 \quad \& \quad g(x) = f(-x) = x^4 - \pi x^3 + \pi^2 x^2 - \pi^3 x + \pi^4$

$h(x) = f(x) - g(x) = 2\pi x^3 + 2\pi^3 x = 2\pi x \cdot (x^2 + \pi^2) = 0 \implies x = 0$, que entre los puntos $[0, \pi]$ define un único recinto de integración $A_1 : (0, \pi)$

$$A_1 = \int_0^{\pi} h(x)\, dx = \int_0^{\pi} \left(2\pi x^3 + 2\pi^3 x\right) dx = \left.\frac{\pi x^4}{2} + \pi^3 x^2\right]_0^{\pi} = \left(\frac{\pi^5}{2} + \pi^5\right) - 0 = \frac{3\pi^5}{2}$$

$$\text{Área} = |A_1| = \frac{3\pi^5}{2} \simeq 459.03\ u^2$$



**Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)**

> *Dados los puntos $A(0,0,1)$ y $B(1,1,0)$, se pide:*
>
> *a) (1 punto) Hallar una ecuación del plano que pasa por los puntos $A$ y $B$ y es perpendicular al plano $z=0$.*
>
> *b) (1.5 puntos) Hallar las ecuaciones de dos rectas paralelas, $r_1$ y $r_2$, que pasen por los puntos $A$ y $B$ respentivamente, estén en el plano $x+z=1$ y tales que la distancia entre ellas sea 1.*
>
> *(Madrid - Matemáticas II - Junio 2024 - Opción A)*

**Solución.**

a) $$\pi \equiv \begin{cases} A(0,0,1) \\ \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1,1,-1) \\ \pi \perp z=0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{n}_{z=0} = (0,0,1) \end{cases} \implies \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\implies \boxed{\pi \equiv x - y = 0}$$



b) Sea $r_1$ la recta que pasa por $A$ y por otro punto $A'$ que vamos a determinar. Como $r_1 \in \pi \equiv x+z=1 \implies A' \in \pi \implies A'(x, y, 1-x)$. Hallaremos la ecuación de la recta $r_1$ y obligaremos a que $d(r_1, r_2) = d(B, r_1) = 1$

$$r_1 \equiv \begin{cases} A(0,0,1) \\ \vec{d}_{r_1} = \overrightarrow{AA'} = (x, y, -x) \approx (1, {}^{y}/_{x}, -1) \approx (1, \lambda, -1) \end{cases}$$

$$d(r_1, r_2) = d(B, r_1) = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \vec{d}_{r_1}\right|}{\left|\vec{d}_{r_1}\right|} = \frac{\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{1+\lambda^2+1}} = \frac{|(\lambda-1, 0, \lambda-1)|}{\sqrt{2+\lambda^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2\cdot(\lambda-1)^2}}{\sqrt{2+\lambda^2}} = 1 \Rightarrow \sqrt{2\cdot(\lambda-1)^2} = \sqrt{2+\lambda^2} \Rightarrow 2\lambda^2 - 4\lambda + 2 = 2 + \lambda^2$$

$$\implies \lambda^2 - 4\lambda = 0 \implies \lambda\cdot(\lambda-4) = 0 \implies \begin{cases} \lambda = 0 \implies \vec{d}_{r_1} = (1,0,-1) \\ \lambda = 4 \implies \vec{d}_{r_1} = (1,4,-1) \end{cases}$$

$$r_1 \equiv \begin{cases} A(0,0,1) \\ \vec{d}_{r_1} \end{cases} \implies r_1 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 1-\lambda \end{cases} \quad \& \quad r_1' \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 1-\lambda \end{cases}$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} B(1,1,0) \\ \vec{d}_{r_2} = \vec{d}_{r_1} \end{cases} \implies r_2 \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1 \\ z = -\lambda \end{cases} \quad \& \quad r_2 \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1+4\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

**Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)**

*Sabiendo que*

$$P(\overline{A}) = \frac{11}{20} \quad \& \quad P(A \mid B) - P(B \mid A) = \frac{1}{24} \quad \& \quad P(A \cap \overline{B}) = \frac{3}{10}$$

*se pide:*

*a) (1.5 puntos) Calcular $P(A \cap B)$ y $P(B)$.*

*b) (1 punto) Calcular $P(C)$, siendo $C$ otro suceso del espacio muestral independiente de $A$ y que verifica $P(A \cup C) = \dfrac{14}{25}$.*

*(Madrid - Matemáticas II - Junio 2024 - Opción A)*

**Solución.**

a) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \dfrac{11}{20} \implies P(A) = \dfrac{9}{20}$

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{9}{20} - P(A \cap B) = \frac{3}{10} \implies \boxed{P(A \cap B) = \frac{3}{20}}$$

$$P(A \mid B) - P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} - \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{3/20}{P(B)} - \frac{3/20}{9/20} = \frac{1}{24}$$

$$\implies \boxed{P(B) = \frac{2}{5}}$$

b) $A$ y $C$ independientes $\implies P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) = \dfrac{9}{20} P(C)$

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) \implies \frac{14}{25} = \frac{9}{20} + P(C) - \frac{9}{20} P(C)$$

$$\implies \boxed{P(C) = \frac{1}{5}}$$

# Junio 2024

# Opción B

**Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)**

*Consideremos las matrices reales*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix} \quad \& \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

*con $b \neq 0$. Se pide:*

a) *(1.25 puntos) Encontrar todos los valores de $b$ para los que se verifica la ecuación $BCB^{-1} = A$.*

b) *(0.75 puntos) Calcular el determinante de la matriz $AA^{\top}$.*

c) *(0.5 puntos) Resolver el sistema $B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, para $b = 1$*

*(Madrid - Matemáticas II - Junio 2024 - Opción B)*



**Solución.**

a) $BCB^{-1} = A \implies BC \cdot \underbrace{B^{-1} \cdot B}_{I} = A \cdot B \implies \boxed{BC = AB}$

$$\begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}$$

$$\implies b \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = b \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \implies \boxed{b \in \mathbb{R} - \{0\}}$$

b) $\left|A \cdot A^{\top}\right| = |A| \cdot \left|A^{\top}\right| = |A| \cdot |A| = |A|^2 = 12^2 = 144$

c) Para $b = 1$ el sistema queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -7 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + 2 \cdot 2 + 5 = 3 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2 - z = -7 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -y = -2 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = -6 \\ y = 2 \\ z = 5 \end{array}}$$

**Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)**

*Calcule:*

*a) (1.25 puntos)* $\displaystyle\int_1^e (x+2)\cdot \ln x\, dx.$

*b) (1.25 puntos)* $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2}\left(\tan\frac{x}{2}\right)^{\left(\frac{1}{\cos x}\right)}$

*(Madrid - Matemáticas II - Junio 2024 - Opción B)*

**Solución.**

a) $$F(x)=\int (x+2)\cdot\ln x\,dx=\left\{\begin{array}{l} u=\ln x\Rightarrow du=\dfrac{1}{x}\,dx\\ dv=(x+2)\,dx\Rightarrow v=\dfrac{x^2}{2}+2x\end{array}\right\}=\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\cdot\ln x$$

$$-\int\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\cdot\ln x-\int\left(\frac{x}{2}+2\right)dx$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\cdot\ln x-\frac{x^2}{4}-2x+C$$

$$\int_1^e (x+2)\cdot\ln x\,dx=F(e)-F(1)=\left[\left(\frac{e^2}{2}+2e\right)\cdot\cancelto{1}{\ln e}-\frac{e^2}{4}-2e\right]$$

$$-\left[\left(\frac{1}{2}+2\right)\cdot\cancelto{0}{\ln 1}-\frac{1}{4}-2\right]=\frac{e^2}{4}+\frac{9}{4}=\frac{9+e^2}{4}\simeq 4.09$$

b) $$L=\lim_{x\to\pi/2}\left(\tan\frac{x}{2}\right)^{\left(\frac{1}{\cos x}\right)}$$

$$\Longrightarrow\ \ln L=\ln\left[\lim_{x\to\pi/2}\left(\tan\frac{x}{2}\right)^{\left(\frac{1}{\cos x}\right)}\right]=\lim_{x\to\pi/2}\left[\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)^{\left(\frac{1}{\cos x}\right)}\right]$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{1}{\cos x}\cdot\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln(\tan(x/2))}{\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\overset{\text{L'Hôp}}{=}\lim_{x\to\pi/2}\frac{\dfrac{\sec^2(x/2)\cdot\frac{1}{2}}{\tan(x/2)}}{-\operatorname{sen} x}=\frac{\dfrac{2\cdot\frac{1}{2}}{1}}{-1}=-1\ \Longrightarrow\ L=e^{-1}\ \Longrightarrow\ \boxed{L=\frac{1}{e}}$$

**Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)**

*Al ordenador de una impresora 3D se suministraron ayer las coordenadas de los cuatro vértices $P_1$, $P_2$, $P_3$ y $P_4$ de un tetraedro sólido, el cual construyó al momento. Se sabe que $P_1(1,1,1)$, $P_2(2,1,0)$ y $P_3(1,3,2)$, pero del cuarto. $P_4(3,a,3)$ hoy no estamos seguros del valor de su segunda coordenada.*

a) *(1.5 puntos) A partir de la cantidad de material utilizado por la impresora, sabemos que el volumen del tetraedro es $V = 1$. También sabemos que la longitud de ninguna de sus aristas supera la altura de la impresora, que es de 10. Determine los posibles valores de $a$.*

b) *(1 punto) Dado el punto $Q(3,3,3)$, se quiere imprimir ahora el paralelepípedo que tiene a los segmentos $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_1P_3}$ y y $\overline{P_1Q}$ como aristas. ¿Cuáles serían los valores de las coordenadas de los ocho vértices del paralelepípedo que habría que suministrar al ordenador?*

*(Madrid - Matemáticas II - Junio 2024 - Opción B)*

**Solución.**

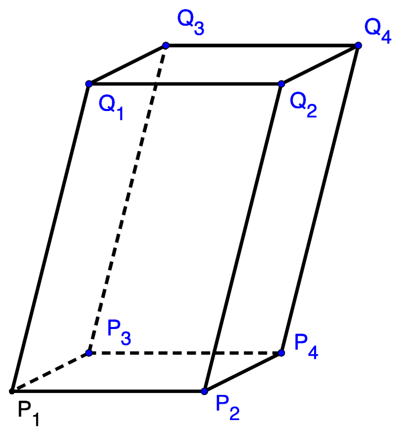
$$\overrightarrow{P_1P_2} = (1,0,-1) \qquad \& \qquad \overrightarrow{P_1P_3} = (0,2,1) \qquad \& \qquad \overrightarrow{P_1P_4} = (2,a-1,2)$$

a) $$V = \frac{1}{6}\cdot\left|\left[\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{P_1P_3},\overrightarrow{P_1P_4}\right]\right| = \frac{1}{6}\cdot\left|\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & a-1 & 2 \end{vmatrix}\right| = \frac{|9-a|}{6} = 1 \implies |9-a| = 6$$

$$\implies \begin{cases} 9-a=-6 \xrightarrow{a=15} \cancel{P_4 = (3,15,3)} \Rightarrow \left|\overrightarrow{P_1P_4}\right| = |(2,14,2)| = \sqrt{204} > 10 \\ 9-a=6 \xrightarrow{a=3} P_4 = (3,3,3) \Rightarrow \begin{cases} \left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = |(1,0,-1)| = \sqrt{2} < 10 \checkmark \\ \left|\overrightarrow{P_4P_2}\right| = |(0,2,1)| = \sqrt{5} < 10 \checkmark \\ \left|\overrightarrow{P_1P_4}\right| = |(2,2,2)| = \sqrt{12} < 10 \checkmark \end{cases} \end{cases}$$

b) Llamamos $P_1(1,1,1)$, $P_2(2,1,0)$, $P_3(1,3,2)$ y $P_4$ a los vértices de la base inferior y $Q_1(3,3,3)$, $Q_2$, $Q_3$ y $Q_4$ a los de la base superior.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP_4} &= \overrightarrow{OP_3} + \overrightarrow{P_3P_4} = \overrightarrow{OP_3} + \overrightarrow{P_1P_2} \\ &= (1,3,2) + (1,0,-1) = (2,3,1) \\ \overrightarrow{OQ_2} &= \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{P_2Q_2} = \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{P_1Q_1} \\ &= (2,1,0) + (2,2,2) = (4,3,2) \\ \overrightarrow{OQ_3} &= \overrightarrow{OP_3} + \overrightarrow{P_1Q_1} = (1,3,2) + (2,2,2) = (3,5,4) \\ \overrightarrow{OQ_4} &= \overrightarrow{OP_4} + \overrightarrow{P_1Q_1} = (2,3,1) + (2,2,2) = (4,5,3) \end{aligned}$$



**Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)**

*Tenemos dos dados, no trucados de seis caras, uno azul y otro rojo.*

*Las caras están numeradas del uno al seis. En un determinado juego lanzamos los dos dados. Para calcular la puntuación obtenida, se sigue el siguiente procedimiento: si el número obtenido en el dado azul es par, se le suma el doble del número obtenido en el dado rojo; si el número obtenido en el dado azul es impar, se le suma el número obtenido en el dado rojo. Se pide:*

a) *(1 punto) Calcular la probabilidad de obtener una puntuación de* 10*. Calcular la probabilidad de obtener una puntuación impar.*

b) *(1.5 puntos) Calcular la probabilidad de haber obtenido un número par en el dado azul, sabiendo que la puntuación final ha sido* 8*. Calcular la probabilidad de haber obtenido un número impar en el dado rojo, sabiendo que la puntuación final ha sido un número par.*

*(Madrid - Matemáticas II - Junio 2024 - Opción B)*

**Solución.**

Para resolver este ejercicio vamos a construir una tabla con las puntuaciones obtenidas en los lanzamientos, de acuerdo a las reglas del juego del enunciado:



| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |

a) $P(\text{“Obtener Diez”}) = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$

$P(\text{“Puntuación impar”}) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$

b) $P(A_{par} \mid \text{“Ocho”}) = \dfrac{P(A_{par} \cap \text{“Ocho”})}{P(\text{“Ocho”})} = \dfrac{3/36}{5/36} = \dfrac{3}{5}$

$P(R_{impar} \mid \text{“Punt. par”}) = \dfrac{P(R_{impar} \cap \text{“Punt. par”})}{P(\text{“Puntuación par”})} = \dfrac{18/36}{27/36} = \dfrac{2}{3}$