MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2024
- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2024

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera la matriz A dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & -2 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & -2 & a \end{pmatrix}$$

a) *(1 punto) Determine los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para los que exista la inversa de A.*

b) *(1 punto) Para $a = -2$ calcule A^{-1}.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

a) $|A| = a^2 \cdot (1-a) - 4 + 2 + 2a + 2a + 2 \cdot (1-a) = -a^3 + a^2 + 2a = -a \cdot (a^2 - a - 2)$
$= -a \cdot (a+1) \cdot (a-2) \neq 0 \implies a \neq \{-1, 0, 2\} \implies \exists A^{-1} \; \forall a \neq \{-1, 0, 2\}$

b) Para $a = -2 \implies A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ & $|A| = 2 \cdot (-2+1) \cdot (-2-2) = 8$

$$\text{Adj}\, A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ -2 & -4 & 2 \\ -4 & -4 & -4 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}\, A^{\top} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 \\ 4 & -4 & -4 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\implies \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/4 & 1/4 & -1/2 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Sea $f(x)$ una función real de variabale real cuya derivada viene dada por la siguiente expresión:

$$f'(x) = x^2 + x - 2$$

a) (1 punto) Obtenga la expresión de la función $f(x)$ sabiendo que pasa por el punto $(0, 2)$.

b) (1 punto) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, clasificando sus extremos relatios si procede.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

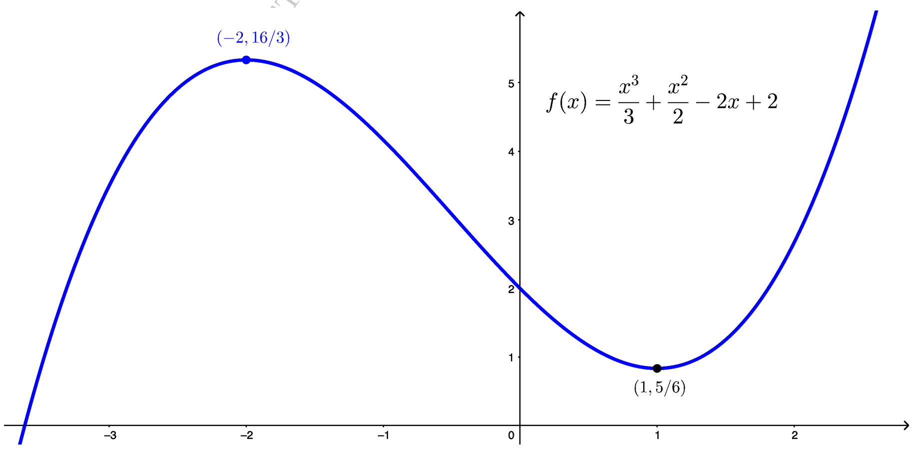
a) $f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \left(x^2 + x - 2\right) dx = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x + C$

Pasa por $(0,2) \implies f(0) = 2 \implies C = 2 \implies \boxed{f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x + 2}$

b) $f'(x) = x^2 + x - 2 = 0 \implies x = \{-2, 1\}$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo $f'(x)$	$+$	-	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ y *decreciente* en $(-2, 1)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(1, 5/6)$ y un *máximo relativo* en $(-2, 16/3)$.



Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variabe real delfinida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + e^2 & , \text{ si } x < 1 \\ ae^{2x} & , \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) (1 punto) Halle el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea continua en todo su dominio.

b) (1 punto) Para $a = 1$, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

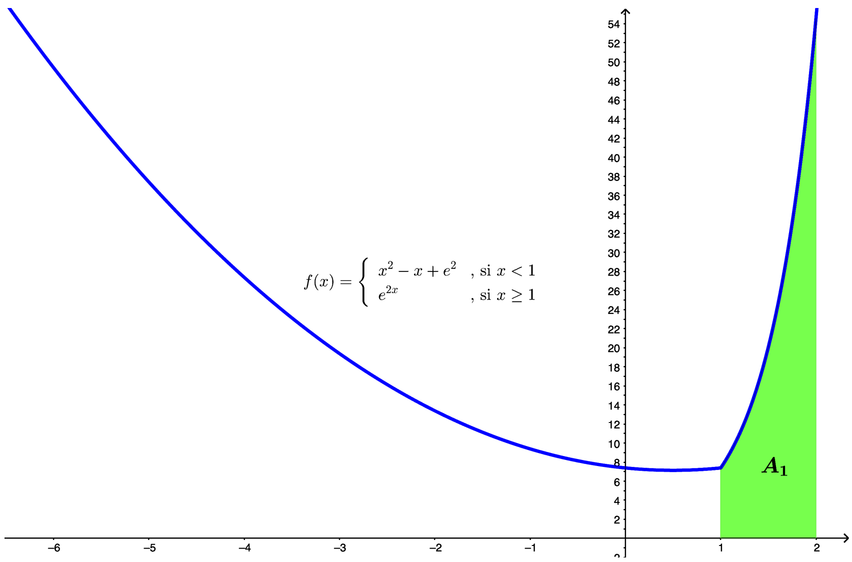
a)
- Si $x \neq 1$ la función $f(x)$ es continua pues ambas ramas son composición de funciones continuas (polinomios y exponenciales)
- Continuidad en $x = 1$
  - $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} \left(x^2 - x + e^2\right) = e^2$
  - $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} \left(ae^{2x}\right) = ae^2$
  - $f(1) = ae^2$

  $f(x)$ es continua en $x = 1 \iff \lim_{x \to 1} f(x) = f(1) \implies ae^2 = e^2 \implies \boxed{a = 1}$

b) Para $a = 1$, entre las rectas $x = 1$ y $x = 2 \Rightarrow f(x) = e^{2x} = 0 \Rightarrow \nexists$ Pto corte con OX. Luego el único recinto de integración es el definido por las rectas $A_1 : (1, 2)$

$$A_1 = \int_1^2 f(x)\, dx = \int_1^2 e^{2x}\, dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \underbrace{2}_{u'} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{e^u}\, dx = \frac{1}{2} \cdot e^{2x}\Big]_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(e^4 - e^2\right)$$

$$\text{Área} = |A_1| = \frac{1}{2} \cdot \left(e^4 - e^2\right) = \frac{e^4 - e^2}{2} \simeq 23.605\ u^2$$



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-9}$$

a) *(1 punto) Determine las asíntotas de esta función.*

b) *(1 punto) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 0$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

a)
- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$
- `A. Vertical:` $\exists\, A.V.$ en $x = -3$ y $x = 3$

$$\lim_{x\to -3} f(x) = \left[\frac{-5}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = \dfrac{-5}{0^+} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = \dfrac{-5}{0^-} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \left[\frac{1}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \dfrac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \dfrac{1}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

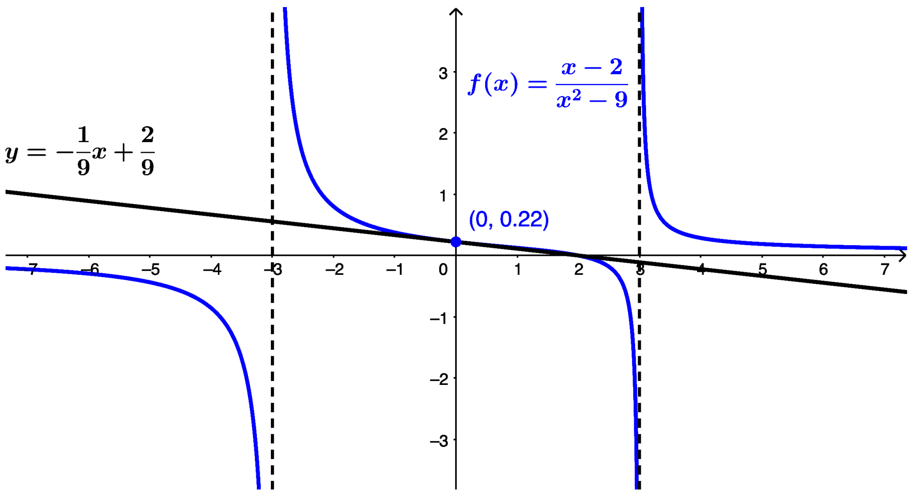
- `A. Horizontal:` $y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x-2}{x^2-9} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = 0 \implies \underset{x\to\pm\infty}{\exists\, A.H.}$ en $y = 0$

b) $x_0 = 0 \implies y_0 = f(x_0) = f(0) = 2/9 \implies (x_0, y_0) = (0, 2/9)$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 9 - (x-2)\cdot 2x}{(x^2-9)^2}$$

$$m_r = f'(x_0) = f'(0) = -\frac{1}{9}$$

$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \implies y - \frac{2}{9} = -\frac{1}{9}\cdot(x - 0) \implies \boxed{r \equiv y = -\frac{1}{9}x + \frac{2}{9}}$$



Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Se dispone de 60 gramos de ácido acetilsalicílico para elaborar tabletas en dos formatos de 4 gramos y de 3 gramos, respectivamente. Se necesitan al menos tres tabletas de 4 gramos, al menos ocho tabletas de 3 gramos y al menos el doble de tabletas de 3 gramos que de 4 gramos. Cada tableta de 4 gramos proporciona un beneficio de 1.5 euros y cada tableta de 3 gramos proporciona un beneficio de 1 euro. ¿Cuántas tabletas deberían fabricarse de cada tipo para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el beneficio máximo?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

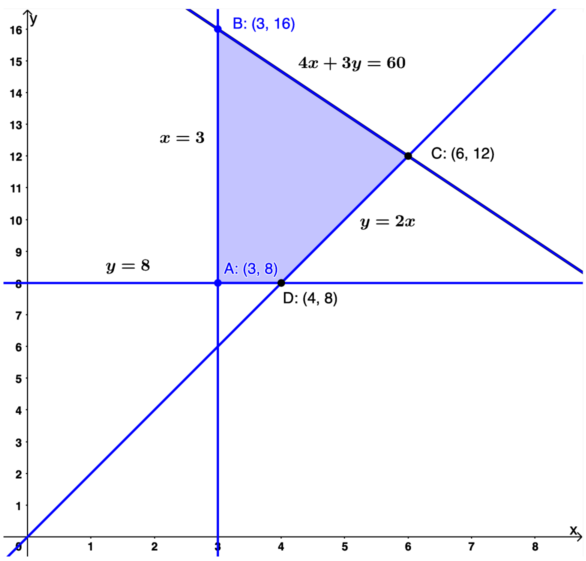
- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de tabletas de 4 gramos"
  $y \equiv$ "Nº de tabletas de 3 gramos"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} (1)\ 4x + 3y \leq 60 & \to (0,20) \quad \& \quad (15,0) \\ (2)\ x \geq 3 & \to (3,0) \\ (3)\ y \geq 8 & \to (0,8) \\ (4)\ y \geq 2x & \to (0,0) \quad \& \quad (3,6) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $B(x,y) = 1.5x + y$ (euros)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $B(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$B(x,y)$
A	3	8	12.5
B	3	16	20.5
C	6	12	21
D	4	8	14

El *beneficio máximo* $B(x,y)$ es de 21 euros y se obtiene fabricando 6 tabletas de 4 gramos y 12 de 3 gramos.

Ejercicio 6 (2 *puntos*)

Un equipo de baloncesto regional ha vendido tres tipos de entradas para su último partido. Las entradas generales se han vendido a 10 *euros, las entradas para estudiantes a* 8 *euros y las entradas infantiles a* 5 *euros. El equipo ha conseguido vender* 600 *entradas y ganar* 4900 *euros. Además, se sabe que ha vendido el doble de entradas generales que de entradas infantiles. Plantee el sistema de ecuaciones y resuelva para calcular el número de entradas vendidas de cada tipo.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{“N}^{\underline{o}}\text{ de entradas generales”}$$
$$y \equiv \text{“N}^{\underline{o}}\text{ de entradas estudiantes”}$$
$$z \equiv \text{“N}^{\underline{o}}\text{ de entradas infantiles”}$$

$$\begin{cases} x+y+z=600 \\ 10x+8y+5z=4900 \\ x=2z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=600 \\ 10x+8y+5z=4900 \\ x-2z=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 10 & 8 & 5 & 4900 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2-10F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & -2 & -5 & -1100 \\ 0 & -1 & -3 & -600 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 2F_3-F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & -2 & -5 & -1100 \\ 0 & 0 & -1 & -100 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x+300+100=600 \\ \Rightarrow -2y-5\cdot 100=-1100 \\ \Rightarrow -z=-100 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=200 \\ y=300 \\ z=100 \end{array}}$$

Ejercicio 7 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x + y + z = a \\ x + ay + z = a + 1 \\ x + y + az = 2 \end{cases}$$

a) (1 punto) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) (1 punto) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & a+1 \\ 1 & 1 & a & 2 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 2a^2 - 2a = 2a \cdot (a-1) = 0 \implies a = \{0, 1\}$$

- Si $a \neq \{0,1\}$ $|A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xRightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $a = 0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche}$ SISTEMA INCOMPATIBLE ($\nexists$ solución)

- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 1$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 2F_2 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow 2x + 3 - \lambda + \lambda = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y + \lambda = 3 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 3 - \lambda \ , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 8 (2 *puntos*)

En un festival de música con 200 asistentes, se observa que a 90 personas les gusta el pop, a 70 el techno y a 30 les gustan ambos géneros. Eligiendo al azar a un asistente del festival, calcule la probabilidad de que:

a) (1 punto) Le guste al menos uno de los dos géneros musicales.

b) (1 punto) Le guste el techno, pero no el pop.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

Sean los sucesos:

$$P \equiv \text{“A la persona le gusta la música pop”}$$
$$T \equiv \text{“A la persona le gusta la música techno”}$$

Del enunciado tenemos:

$$P(P) = \frac{90}{200} = 0.45 \qquad \& \qquad P(T) = \frac{70}{200} = 0.35 \qquad \& \qquad P(P \cap T) = \frac{30}{200} = 0.15$$

a) $P(P \cup T) = P(P) + P(T) - P(P \cap T) = 0.45 + 0.35 - 0.15 \implies \boxed{P(P \cup T) = 0.65}$

b) $P(T \cap \overline{P}) = P(T) - P(T \cap P) = 0.35 - 0.15 \implies \boxed{P(T \cap \overline{P}) = 0.2}$

Ejercicio 9 (2 *puntos*)

La cantidad de agua absorbida por un tipo particular de planta acuática, se puede modelar con una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 8$ ml.

a) (1 punto) Se selecciona aleatoriamente una muestra de 25 plantas acuáticas, y se determina que la cantidad media de agua absorbida es de 120 ml. Calcule un intervalo de confianza del 95 % para la media de la cantidad de agua absorbida por este tipo de planta acuática.

b) (1 punto) Determine el tamaño mínimo de la muestra necesario para que el error máximo, en la estimación de la media de la cantidad de agua, absorbida, sea menor que 1 ml, con un nivel de confianza del 90 %.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

$$X \equiv \text{“Cantidad de agua abosrvida por la planta (ml)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 8)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 8) \xrightarrow{n=25} \overline{x} = 120 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.95$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{8}{\sqrt{25}} = 3.14$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (116.86; 123.14)}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 1 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.9$

$$1-\alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies \alpha/2 = 0.05 \implies 1-\alpha/2 = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{8}{\sqrt{n}} < 1 \implies n > \left(1.645 \cdot \frac{8}{1}\right)^2 = 173.18 \implies \boxed{n = 174}$$

Ejercicio 10 (2 *puntos*)

En tres tanques, A, B y C, de una piscifactoría se crían, respectivamente, el 35 %, el 20 % y el 45 % de los alevines de salmón noruego. Se sabe que el 15 % de los alevines criados en el tanque A, el 30 % de los alevines criados en el tanque B y el 25 % de los alevines criados en el tanque C miden más de 35 mm. Eligiendo al azar, un alevín de salmón noruego, calcule la probabilidad de que:

a) (1 punto) Mida más de 35 mm.

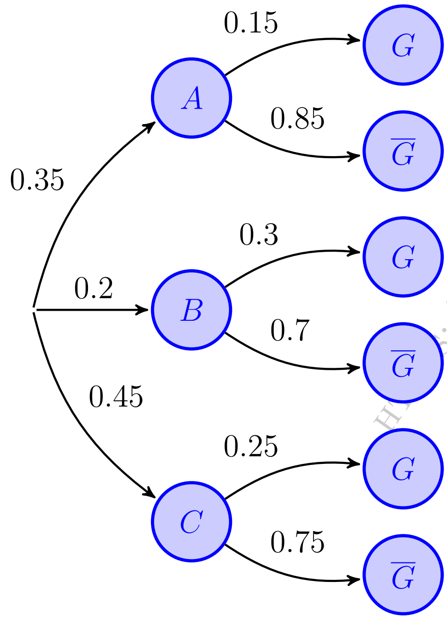
b) (1 punto) Sabiendo que no mide más de 35 mm, proceda del tanque C.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

Sean los sucesos:

$A \equiv$ "El alevín es del tanque A"
$B \equiv$ "El alevín es del tanque B"
$C \equiv$ "El alevín es del tanque C"
$G \equiv$ "El alevín mide más de 35 mm"



a) $$\begin{aligned} P(G) &= P\big((A\cap G)\cup(B\cap G)\cup(C\cap G)\big) \\ &= P(A\cap G)+P(B\cap G)+P(C\cap G) \\ &= P(A)\cdot P(G\mid A)+P(B)\cdot P(G\mid B) \\ &+ P(C)\cdot P(G\mid C) = 0.35\cdot 0.15 \\ &+ 0.2\cdot 0.3 + 0.45\cdot 0.25 = 0.225 \end{aligned}$$

b) $$P(C\mid \overline{G}) = \frac{P(C\cap \overline{G})}{P(\overline{G})} = \frac{P(C)\cdot P(\overline{G}\mid C)}{1-P(G)} = \frac{0.45\cdot 0.75}{1-0.225} = 0.4355$$