MATEMATICAS II

EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2024

- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2024 (Ordinario)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Dentro de un grupo de estudiantes que realiza un examen hay tres a los que les sale mejor de lo que esperaban. Estos son Antonio, María y Paula. Antonio obtiene la mitad de la nota de Paula más un tercio de la nota de María. El doble de la nota de María es igual a la de Antonio más la de Paula y Paula saca dos puntos más que Antonio. Razone si el enunciado expuesto es posible. En caso afirmativo, calcule la nota de cada estudiante.

(Cantabria - Matemáticas II - Junio 2024)

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{“Nota de Antonio”} \\ y &\equiv \text{“Nota de María”} \\ z &\equiv \text{“Nota de Paula”} \end{aligned}$$

Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} x = \dfrac{z}{2} + \dfrac{y}{3} \\ 2y = x + z \\ z = x + 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 6x - 2y - 3z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x - z = -2 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones por el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 6 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 6F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 10 & -9 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - 5F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x - 2\cdot 9 + 10 = 0 \\ \Rightarrow 2y - 20 = -2 \\ \Rightarrow z = 10 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 8 \\ y = 9 \\ z = 10 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Considere la función $f(x) = x \cdot \ln x$, *con* $x > 0$.

1) *(0.75 puntos) Calcule la derivada de* $f(x)$.

2) *(0.75 puntos) Calcule una primitiva de* $f(x)$.

3) *(1 punto) Calcule el área del recinto limitado por* $f(x)$, *el eje* OX *de abscisas y las rectas* $x = 1$ *y* $x = 2$.

(Cantabria - Matemáticas II - Junio 2024)

Solución.

1) $f'(x) = \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = 1 + \ln x, \;\; x > 0$

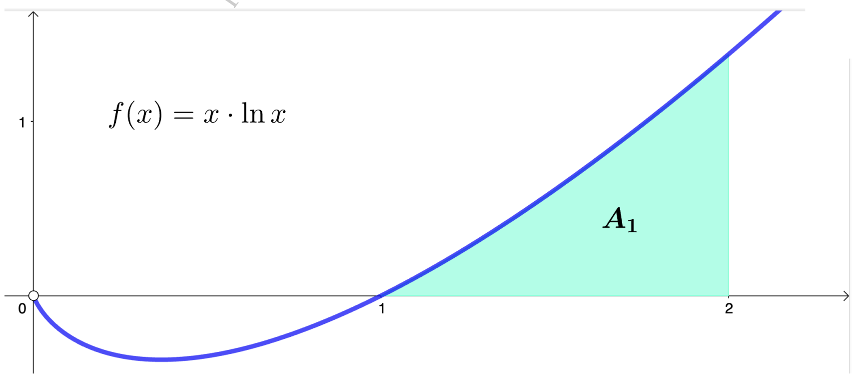
2) $$F(x) = \int x \cdot \ln x \, dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{1}{x}\, dx \\ \\ dv = x\, dx \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \frac{x^{\cancel{2}}}{2}\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x}{2}\, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{4} \cdot (2 \cdot \ln x - 1) + C$$

3) Puntos de corte con el eje OX : $y = 0 \implies x{\cdot}\ln x = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ \ln x = 0 \implies x = 1 \end{cases}$, que, junto con las rectas $x = 1$ y $x = 2$ define un único recinto de integración $A_1 : (1, 2)$.

$$A_1 = \int_1^2 f(x)\, dx = F(2) - F(1) = 2 \cdot \ln 2 - 1 - \left(-\frac{1}{4}\right) = \ln 4 - \frac{3}{4}$$

$$\text{Área} = |A_1| = \ln 4 - \frac{3}{4} \simeq 0.6363 \; u^2$$



Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Considere la recta

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z+5=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$$

y el plano $\pi \equiv 2x+y-az=3$ *en función del parámetro* $a \in \mathbb{R}$. *Razone si es posible asignar algún valor al parámetro* a *para que:*

1) *(0.75 puntos) la recta esté contenida en el plano. En caso afirmativo, dé un valor para* a.

2) *(0.75 puntos) la recta y el plano sean paralelos. En caso afirmativo, dé un valor para* a.

3) *(1 punto) la recta y el plano se corten. En caso afirmativo, dé un valor para* a *y dónde se cortan.*

(Cantabria - Matemáticas II - Junio 2024)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} R(-10,5,0) \\ \vec{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-3,2,1) \end{cases} \Longrightarrow r \equiv \begin{cases} x=-10-3\lambda \\ y=5+2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

1) $r \in \pi \iff \begin{cases} \vec{d_r} \perp \vec{n}_\pi \\ R \in \pi \Longrightarrow -20+5-0 \neq 3 \Longrightarrow R \notin \pi \end{cases} \Longrightarrow r \notin \pi \ \forall a \in \mathbb{R}$

2) $r \parallel \pi \iff \left\{\vec{d_r} \perp \vec{n}_\pi \Rightarrow \vec{d_r} \cdot \vec{n}_\pi = (-3,2,1)\cdot(2,1,-a) = -6+2-a=0 \Rightarrow \boxed{a=-4}\right. \Longrightarrow$ $r \nparallel \pi \ \forall a \in \mathbb{R}$

3) Según lo visto en el apartado anterior $r \cap \pi \iff \boxed{a \neq -4}$. Elegimos $a=2$

$$P = r \cap \pi \Longrightarrow 2\cdot(-10-3\lambda)+5+2\lambda-2\lambda=3 \Longrightarrow \lambda=-3 \Longrightarrow \boxed{P(-1,-1,-3)}$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Ciertos síntomas pueden deberse a tres enfermedades diferentes, que no se padecen de forma simultánea. Con una probabilidad 0.7 se deben a la enfermedad 1 (E1), con una probabilidad 0.2 a la enfermedad 2 (E2) y con una probabilidad 0.1 a la enfermedad 3 (E3). Existen tres tratamientos diferentes: el A es el adecuado para E2, el B para E3 y el C para E1. así todo, cada uno de los tratamientos tiene cierto poder de curación de cada una de las enfermedades. La probabilidad de ser curado con cierto tratamiento cuando se tiene cierta enfermedad viene dada para cada tratamiento y enfermedad por la siguiente tabla:

	$E1$	$E2$	$E3$
Trat. A	0.6	1	0.4
Trat. B	0.65	0.5	0.9
Trat. C	0.75	0.2	0.5

Noté que, de acuerdo con la misma, la probabilidad de curarse con el tratamiento A cuando se tiene E3 es de 0.4. ¿Qué tratamiento debemos administrar a un paciente con dichos síntomas, teniendo en cuenta que no sabemos a priori, cuál de las tres enfermedades padece?

(Cantabria - Matemáticas II - Junio 2024)

Solución.

Las probabilidades de padecer la enfermedad i son:

$$P(E1) = 0.7 \quad \& \quad P(E2) = 0.2 \quad \& \quad P(E3) = 0.1$$

Mientras que la tabla expresa las probabilidades $P(Trat\_j \mid E_i)$ de ser curado con el Tratamiento j, si padece la enfermedad i.

$$\begin{aligned}
P(A) &= P\Big((E1 \cap A) \cup (E2 \cap A) \cup (E3 \cap A)\Big) = P(E1 \cap A) + P(E2 \cap A) + P(E3 \cap A) \\
&= P(E1) \cdot P(A \mid E1) + P(E2) \cdot P(A \mid E2) + P(E3) \cdot P(A \mid E3) \\
&= 0.7 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 1 + 0.1 \cdot 0.4 = 0.66 \\
P(B) &= P\Big((E1 \cap B) \cup (E2 \cap B) \cup (E3 \cap B)\Big) = P(E1 \cap B) + P(E2 \cap B) + P(E3 \cap B) \\
&= P(E1) \cdot P(B \mid E1) + P(E2) \cdot P(B \mid E2) + P(E3) \cdot P(B \mid E3) \\
&= 0.7 \cdot 0.65 + 0.2 \cdot 0.5 + 0.1 \cdot 0.9 = 0.645 \\
P(C) &= P\Big((E1 \cap C) \cup (E2 \cap C) \cup (E3 \cap C)\Big) = P(E1 \cap C) + P(E2 \cap C) + P(E3 \cap C) \\
&= P(E1) \cdot P(C \mid E1) + P(E2) \cdot P(C \mid E2) + P(E3) \cdot P(C \mid E3) \\
&= 0.7 \cdot 0.75 + 0.2 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.5 = 0.615
\end{aligned}$$

Por lo tanto el paciente tiene más probabilidades de sanar sus síntomas si se le administra el Tratamiento A.

Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)

Considera la ecuación $AX = B$, *donde* $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -1 & 5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

1) (0.25 puntos) Calcule el determinante de A.

2) (1 punto) Razone si A *tiene inversa y, en caso afirmativo, calcule la inversa de* A.

3) (0.25 puntos) Determine el número de filas y de columnas de X *para que la ecuación tenga sentido.*

4) (1 punto) Calcule el valor de X.

(Cantabria - Matemáticas II - Junio 2024)

Solución.

1) $|A| = -1$

2) $|A| \neq 0 \implies \exists A^{-1} \quad \& \quad \text{Adj}\, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad \boxed{A^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$

3) $\underbrace{\underbrace{A}_{3\times 3} \cdot \underbrace{X}_{m\times n}}_{3\times n} = \underbrace{B}_{3\times 2} \xRightarrow[n=2]{m=3} X \in \mathcal{M}_{3\times 2}$

4) $A \cdot X = B \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot B \implies \boxed{X = A^{-1} \cdot B}$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -1 & 5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \\ -10 & 11 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)

Considera la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x^2+x} & , \textit{si } x \leq 10 \\ \sqrt{x+1} & , \textit{si } x > 10 \end{cases}$

1) (0.5 puntos) Determine el dominio de definición de $f(x)$.

2) (1 punto) Determine los intervalos, del dominio de definición, en que $f(x)$ es continua.

3) (1 punto) Determine si $f(x)$ tiene asíntotas. En caso afirmativo, calcúlelas.

(Cantabria - Matemáticas II - Junio 2024)

Solución.

1) $\begin{cases} f_1: & x^2+x = x\cdot(x+1) = 0 \implies x = \{-1,0\} \leq 10 \\ f_2: & x+1 \geq 0 \implies x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}\{-1,0\}$

2) Estudiamos la continuidad en los puntos que no pertenecen al dominio $\{-1,0\}$ y en la frontera de la función a trozos $x=10$.

- $x=-1$
  - $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{x^2+x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\cancel{x+1}}{x\cdot\cancel{(x+1)}} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1}{x} = -1$
- $x=0$
  - $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+1}{x^2+x} = \left[\dfrac{1}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \dfrac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \dfrac{1}{0^+} = +\infty \end{cases}$
- $x=10$
  - $\lim\limits_{x\to 10^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 10} \dfrac{x+1}{x^2+x} = \dfrac{1}{10}$
  - $\lim\limits_{x\to 10^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 10} \sqrt{x+1} = \sqrt{11}$
  - $f(10) = \dfrac{11}{110} = \dfrac{1}{10}$

Por lo tanto la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-1,0,10\}$. En $x=-1$ hay una discontinuidad evitable, en $x=0$ hay una discontinuidad inevitable de salto infinito, mientras que en $x=10$ hay una discontinuidad inevitable de salto finito.

3)
- `A. Vertical:` $\exists\, A.V.$ en $x=-1$, tal y como se vio en el apartado anterior
- `A. Horizontal:` $\exists \underset{x\to-\infty}{A.H.}$ en $y=0$.

  $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x+1}{x^2+x} = 0$

  $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$

Ejercicio 7 (2.5 *puntos*)

Sean $A(6,2,-1)$, $B(3,0,5)$ y $C(-2,1,2)$ los vértices de un triángulo.

1) (1.25 puntos) Calcule los ángulos internos del triángulo.

2) (1.25 puntos) Calcule el área del triángulo.

(Cantabria - Matemáticas II - Junio 2024)

Solución.

$$\overrightarrow{AB}=(-3,-2,6) \quad \& \quad \overrightarrow{AC}=(-8,-1,3) \quad \& \quad \overrightarrow{BC}=(-5,1,-3)$$

1) $$\cos\hat{A}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{(-3,-2,6)\cdot(-8,-1,3)}{7\cdot\sqrt{74}}=\frac{44}{7\cdot\sqrt{74}} \implies \hat{A}=43°3'18''$$

$$\cos\hat{B}=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{(3,2,-6)\cdot(-5,1,-3)}{7\cdot\sqrt{74}}=\frac{5}{7\cdot\sqrt{35}} \implies \hat{B}=83°\ 3'\ 55''$$

$$\hat{C}=180°-\hat{A}-\hat{B} \implies \hat{C}=53°\ 52'\ 47''$$

2) $$\mathrm{S}_{\underset{ABC}{\triangle}}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & -2 & 6\\ -8 & -1 & 3\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot|(0,-39,-13)|$$

$$=\frac{13\sqrt{10}}{2}\simeq 20.55\ u^2$$

Ejercicio 8 (2.5 *puntos*)

La población de mujeres de 18 años sigue una distribución normal de media una altura de 175 cm y una desviación estándar de 7.41 cm. Supongamos que la probabilidad de que una persona se llame Lucía es 0.006.

1) (1.25 puntos) Calcule la probabilidad de que una mujer de 18 años se llame Lucía y mida más de 180 cm.

2) (1.25 puntos) Calcule la probabilidad de que una mujer de 18 años se llame Lucía o mida más de 180 cm.

(Cantabria - Matemáticas II - Junio 2024)

Solución.

$$X \equiv \text{“Altura de las mujeres de 18 años (cm)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(175, 7.41)$$

Sean los sucesos: $M \equiv$ “La mujer de 18 años mide más de 180 cm”

$L \equiv$ “La mujer de 18 años se llama Lucía”

1) $P(M) = P(X \geq 180) = P\left(Z \geq \dfrac{180 - 175}{7.41}\right) = P(Z \geq 0.67)$

$= 1 - P(Z \leq 0.67) = 1 - 0.7486 = 0.2514$

$P(L \cap M) \overset{Suc.\_Ind.}{=} P(L) \cdot P(M) = 0.006 \cdot 0.2514 = 0.0015$

2) $P(L \cup M) = P(L) + P(M) - P(L \cap M) = 0.006 + 0.2514 - 0.0015 = 0.2559$