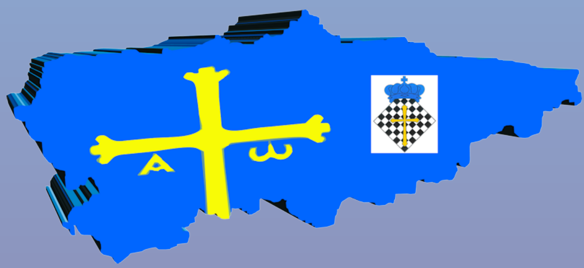
MATEMATICAS II

EXAMENES RESUELTOS



EVAU JUNIO 2024

- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2024 (Ordinario)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

En una protectora de animales se dan tres tipos de alimentos a tres razas de perros distintas. Cada perro de la raza 1 consume, por semana, un promedio de 2 unidades de alimento A y 1 unidad del alimento C. Cada perro de la raza 2 consume por semana, un promedio de 1 unidad del alimento A y 1 unidad del alimento C. El consumo semanal promedio de la raza 3 es de 3 unidades de alimento A, 1 unidad de alimento B y 3 unidades de alimento C. Cada semana se compran 410 unidades del alimento A, 30 unidades del alimento B y 310 del alimento C. Se supone que toda la comida que se proporciona se consume.

a) *(0.75 puntos) Plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice este problema y escribelo matricialmente.*

b) *(1 punto) ¿Cuántos ejemplares de cada raza pueden coexistir en la protectora?*

c) *(0.75 puntos) Si la raza 2 consumiese 1 unidad del alimento B, ¿existiría otra distribución del número de ejemplares de cada raza que permitiese mantener las unidades compradas cada semana?*

(Asturias - Matemáticas II - Junio 2024)

Solución.

a) Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{“N}^{\underline{\text{o}}}\text{ de perros de la raza 1”} \\ y &\equiv \text{“N}^{\underline{\text{o}}}\text{ de perros de la raza 2”} \\ z &\equiv \text{“N}^{\underline{\text{o}}}\text{ de perros de la raza 3”} \end{aligned}$$

Resumimos los datos del enunciado en una tabla:

	Raza 1	Raza 2	Raza 3	Existencias
Alimento A	2	1	3	410
Alimento B	0	0	1	30
Alimento C	1	1	3	310

Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 410 \\ z = 30 \\ x + y + 3z = 310 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 410 \\ 30 \\ 310 \end{pmatrix}$$

b) Resolvemos el sistema de ecuaciones por el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 410 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \\ 1 & 1 & 3 & 310 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ 2F_3 - F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 410 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \\ 0 & 1 & 3 & 210 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow 2x + 120 + 3 \cdot 30 = 410 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = 30 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y + 3 \cdot 30 = 210 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 100 \text{ perros raza 1} \\ y = 120 \text{ perros raza 2} \\ z = 30 \text{ perros raza 3} \end{array}}$$

c) Actualizamos la tabla con los nuevos datos del apartado

	Raza 1	Raza 2	Raza 3	Existencias
Alimento A	2	1	3	410
Alimento B	0	1	1	30
Alimento C	1	1	3	310

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 410 \\ y + z = 30 \\ x + y + 3z = 310 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones por el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 410 \\ 0 & 1 & 1 & 30 \\ 1 & 1 & 3 & 310 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ 2F_3 - F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 410 \\ 0 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 1 & 3 & 210 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 410 \\ 0 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 0 & 2 & 180 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow 2x - 60 + 3 \cdot 90 = 410 & \Rightarrow \\ \Rightarrow x + 90 = 30 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2z = 180 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 100 \text{ perros raza 1} \\ y = -60 \text{ perros raza 2} \\ z = 90 \text{ perros raza 3} \end{array}}$$

En este supuesto el número de perros de la raza 2 debería ser negativo, lo cual es absurdo, por lo que no existiría otra distribución posible del número de animales.

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Sea $x \in \mathbb{R}$ *y la matriz* $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & x \end{pmatrix}$.

a) *(1.5 puntos) Da el* $\text{rg}(A)$ *según los valores de* x*. Para* $x = 1$*, comprueba que existe* A^{-1} *y calcúlala.*

b) *(1 punto) Toma* $x = 1$*. Supongamos que* B *es una matriz* 3×3 *con* $\det(B) = 5$*. Calcula* $\det(AB)$*. Razona cuál debe ser el valor de* $\det\left(\frac{1}{5}AB\right)$.

(Asturias - Matemáticas II - Junio 2024)

Solución.

a) $|A| = -x + 2 = 0 \implies x = 2$

- Si $x \neq 2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{rg}(A) = 3$
- Si $x = 2 \Rightarrow |A| = 0 \implies \text{rg}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{rg}(A) = 2$

Si $x = 1 \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A| = -1 + 2 = 1 \implies \exists A^{-1}$

$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^{\top} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $|AB| = |A| \cdot |B| = 1 \cdot 5 = 5$

$\left|\frac{1}{5}AB\right| = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot |AB| = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot 5 = \frac{1}{25}$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Se considera la función $f(x) = \dfrac{x-4}{1-x}$.

a) *(1 punto) Calcula el dominio de la función f y sus asíntotas.*

b) *(1 punto) Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.*

c) *(0.5 puntos) Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f.*

(Asturias - Matemáticas II - Junio 2024)

Solución.

a)
- `Dominio:` $1-x=0 \implies x=1 \implies \mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{1\}$
- `A. Vertical:` $\exists A.V.$ en $x=1$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x-4}{1-x} = \left[\frac{-3}{0}\right] = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{-3}{0^+} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{-3}{0^-} = +\infty \end{cases}$$

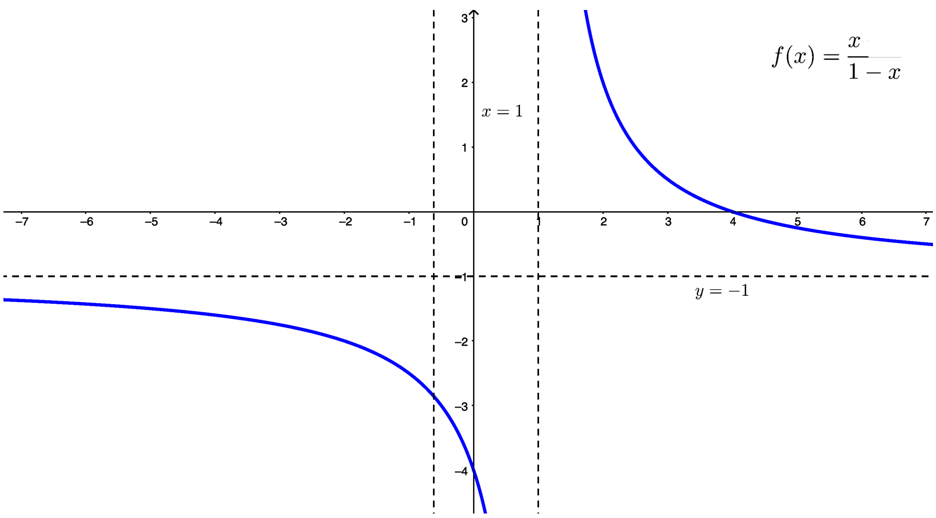
- `A. Horizontal:` $y = \displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-4}{1-x} = \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow \exists \underset{x\to\pm\infty}{A.H.}$ en $y=-1$

b) $f'(x) = \dfrac{1-x+(x-4)}{(1-x)^2} = \dfrac{3}{(1-x)^2} \neq 0 \implies \nexists$ Extremos relativos.

Como $f'(x) > 0 \;\forall x \in \mathbb{R}-\{1\} \implies$ la función es creciente en su dominio.

$f''(x) = \dfrac{-6}{(1-x)^3} \neq 0 \implies \nexists$ Puntos de inflexión.

	$(-\infty,1)$	$(1,+\infty)$
Signo $f''(x)$	-	+
$f(x)$	Cóncava $\cap$	Convexa $\cup$



Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

> *Dada la función* $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$.
>
> *a) (1.25 puntos) Calcula una primitiva que pase por el punto* $(0, 1)$.
>
> *b) (1.25 puntos) Calcula el área limitada por* f*, el eje* X *y las rectas* $x = 0$ *y* $x = \frac{\pi}{2}$.
>
> *(Asturias - Matemáticas II - Junio 2024)*

Solución.

a) $F(x) = \displaystyle\int \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) dx = -\frac{1}{2}\int \underbrace{-2}_{u'} \cdot \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}_{\operatorname{sen} u} dx = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + C$

$$f(0) = 1 \implies C = 1 \implies \boxed{F(x) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + 1}$$

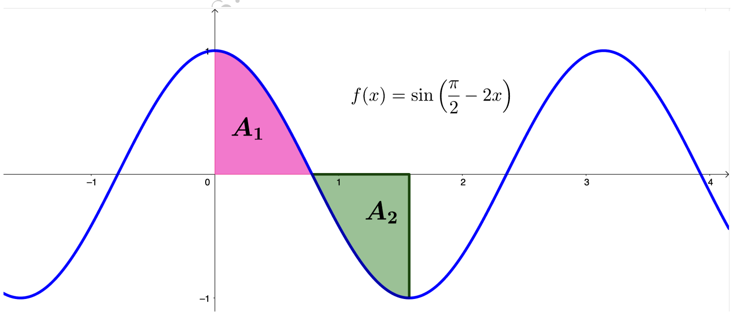
b) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0 \implies \frac{\pi}{2} - 2x = k\pi,\ k = 0, 1, \ldots \xrightarrow{x \in [0, \pi/2]} x = \frac{\pi}{4}$

El punto de corte con el eje X, junto con las rectas $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$, define dos recintos de integración $A_1 : (0, \pi/4)$ y $A_2 : (\pi/4, \pi/2)$.

$$A_1 = \int_0^{\pi/4} f(x)\,dx = F(\pi/4) - F(0) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$A_2 = \int_{\pi/4}^{\pi/2} f(x)\,dx = F(\pi/2) - F(\pi/4) = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Área} = |A_1| + |A_2| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\ u^2$$



Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)

Dado el punto $A(0,-1,1)$ y el plano $\pi \equiv x+y+z+3=0$.

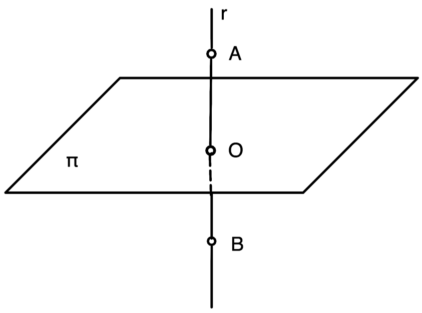
a) (1.5 puntos) Calcula el punto B simétrico de A respecto de π.

b) (1 punto) Calcula el área del triángulo plano cuyos vértices son A, $C(-2,-3,1)$ y el origen de coordenadas.

(Asturias - Matemáticas II - Junio 2024)

Solución.

a) Hallamos la recta $r \perp \pi$, que pasa por A



$$r \equiv \begin{cases} A(0,-1,1) \\ \vec{d_r} = \vec{n}_\pi = (1,1,1) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}$$

$$O = r \cap \pi \implies \lambda - 1 + \lambda + 1 + \lambda + 3 = 0$$

$$\implies \lambda = -1 \implies O(-1,-2,0)$$

$$O = \frac{A+B}{2} \implies B = 2O - A = 2\cdot(-1,-2,0) - (0,-1,1) \implies \boxed{B = (-2,-3,-1)}$$

b) $$\text{Área}_{\overset{\triangle}{AOC}} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot|(2,-2,-2)| = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\ u^2$$

Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)

Se consideran los puntos $A(1,1,1)$, $B(1,0,2)$, $C(-1,1,3)$ *y* $D(-1,0,1)$.

a) *(0.75 puntos) Estudia si existe un plano que contenga a los cuatro puntos.*

b) *(0.75 puntos) Calcula la recta* r *que pasa por* D *y es perpendicular al plano* π *que contiene a* A, B *y* C.

c) *(1 punto) Calcula el punto* P *intersección de* $r \equiv x+1=-y=z-1$ *y* $\pi \equiv x-y-z=1$.

(Asturias - Matemáticas II - Junio 2024)

Solución.

a) $\overrightarrow{AB} = (0,-1,1) \qquad \& \qquad \overrightarrow{AC} = (-2,0,2) \qquad \& \qquad \overrightarrow{AD} = (-2,-1,0)$

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \implies A,\ B,\ C \text{ y } D \text{ no son coplanarios.}$$

b) $$\pi \equiv \begin{cases} A(1,1,1) \\ \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (0,-1,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-2,0,2) \approx (-1,0,1) \end{cases} \implies \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\implies -(x-1)-(y-1)-(z-1) = 0 \implies \pi \equiv x+y+z-3 = 0$$

$$r \equiv x+1 = -y = z-1 \implies r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1} \implies r \equiv \begin{cases} x = -1+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}$$

$$P = r \cap \pi \implies -1+\lambda-\lambda+1+\lambda-3 = 0 \xrightarrow{\lambda=3} \boxed{P(2,-3,4)}$$

Ejercicio 7 (2.5 *puntos*)

En una empresa 55 % de los trabajadores han hecho el curso "ChatGPT". El 30 % de los trabajadores que han hecho este curso también han hecho el curso"IA", el 40 % de los que no han hecho el curso "ChatGPT" han realizado el curso "IA".

a) (1.25 puntos) Tomado un trabajador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya realizado el curso "IA"?

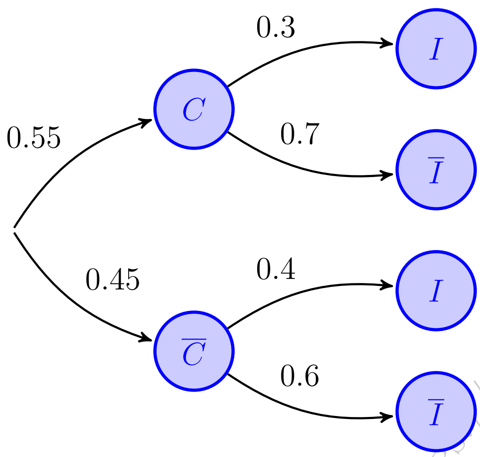
b) (1.25 puntos) Si un trabajador elegido al azar no ha hecho el curso "IA" ¿cuál es la probabilidad de que sí tenga el curso de "ChatGPT"?

(Asturias - Matemáticas II - Junio 2024)

Solución.

Sean los sucesos:

$$C \equiv \text{“El alumno ha hecho el curso ChatGPT”}$$
$$I \equiv \text{“El alumno ha hecho el curso IA”}$$



a) $$\begin{aligned} P(I) &= P\Big((C\cap I)\cup(\overline{C}\cap I)\Big) \\ &= P(C\cap I)+P(\overline{C}\cap I) \\ &= P(C)\cdot P(I\mid C)+P(\overline{C})\cdot P(I\mid \overline{C}) \\ &= 0.55\cdot 0.3+0.45\cdot 0.4 = 0.345 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(C\mid \overline{I}) &= \frac{P(C\cap \overline{I})}{P(\overline{I})} = \frac{P(C)\cdot P(\overline{I}\mid C)}{1-P(I)} \\ &= \frac{0.55\cdot 0.7}{1-0.345} = 0.5878 \end{aligned}$$

Ejercicio 8 (2.5 *puntos*)

Una empresa cafetera realiza una encuesta a 10000 *individuos sobre el tipo de café que compran. Los resultados son:* 8000 *dicen comprar café torrefacto,* 4000 *café natural y* 3000 *ambos tipos de café.*

a) *(0.5 puntos) Si se elige un individuo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que compre alguno de los dos tipos de café?*

b) *(1 punto) Se selecciona un individuo y se le pregunta si compra café natural. Se repite la operación.* 100 *veces, pudiendo repetirse, el individuo seleccionado. Calcule aproximando por una distribución normal si fuese posible, la probabilidad de que no más de* 50 *individuos compre café natural.*

c) *(1 punto) Si en el apartado anterior solo se seleccionase* 10 *individuos, ¿cuál es la probabilidad de que* 5 *compren café natural?*

(Asturias - Matemáticas II - Junio 2024)

Solución.

Sean los sucesos:

$$T \equiv \text{“El individuo compra café torrefacto”}$$
$$N \equiv \text{“El individuo compra café natural”}$$

Del enunciado tenemos:

$$P(T) = \frac{8000}{10000} = 0.8 \qquad \& \qquad P(N) = \frac{4000}{10000} = 0.4 \qquad \& \qquad P(T \cap N) = \frac{3000}{10000} = 0.3$$

a) $P(T \cup N) = P(T) + P(N) - P(T \cap N) = 0.8 + 0.4 - 0.3 = 0.9$

b) $X \equiv$ “Nº de individuos que toman café natural” $\longrightarrow X : \mathcal{B}(100, 0.4)$

$$X : \mathcal{B}(100, 0.4) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} n = 100 > 20 \checkmark \\ np = 40 > 5 \checkmark \\ nq = 60 > 5 \checkmark \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{X} : \mathcal{N}(np, \sqrt{npq}) \approx \overline{X} : \mathcal{N}(40, 4.9)$$

$$P(X \leq 50) = P(Y \leq 50.5) = P\left(Z \leq \frac{50.5 - 40}{4.9}\right) = P(Z \leq 2.14) = 0.9838$$

c) $X : \mathcal{B}(10, 0.4)$

$$P(X = 5) = \binom{10}{5} \cdot 0.4^5 \cdot 0.6^5 = 0.2007$$