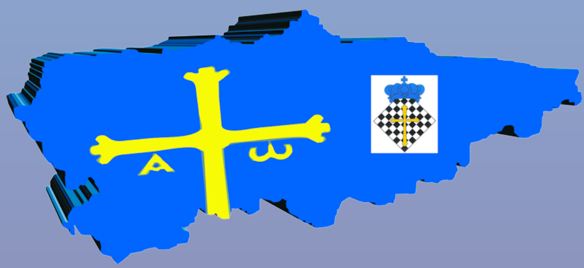
MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS



EVAU JULIO 2023
- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2023 (Extraordinario)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Sea $a \in \mathbb{R}$ *y* $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

a) (0.75 puntos) Calcula el determinante y el rango de P para cada valor de a.

b) (1 punto) Para $a = 1$ ¿existe P^{-1}? En caso afirmativo calcúlala.

c) (0.75 puntos) Para $a = 1$, calcula det(M) sabiendo que $P \cdot M = M^2$.

(Asturias - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

a) $|P| = 2a - 4 = 0 \implies a = 2$

- Si $a \neq 2 \quad |P| \neq 0 \implies \text{ran}(P) = 3$
- Si $a = 2 \quad |P| = 0 \implies \text{ran}(P) < 3$, y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(P) = 2$

b) Si $a = 1 \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \& \quad |P| = 2 \cdot 1 - 4 = -2 \neq 0 \implies \exists P^{-1}$

$$\text{Adj}P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \& \quad P^{-1} = \frac{1}{|P|} \cdot \text{Adj}\, P^{\top} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\implies \boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1 & -1/2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

c) $$|P \cdot M| = |M^2| \Rightarrow |P| \cdot |M| = |M|^2 \Rightarrow |M| \cdot \big(|M| - |P|\big) = 0 \implies \begin{cases} \boxed{|M| = 0} \\ \boxed{|M| = |P| = -2} \end{cases}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} x - y + az = -1 \\ 2x + y = 1 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$$

a) (1 punto) Discute el sistema según los valores de a.

b) (0.75 puntos) Resuelve el sistema para el caso $a = -3$ si es posible.

c) (0.75 puntos) Encuentra, en caso de que exista, un valor de a que verifique $x = 1$. Calcula la solución en ese caso.

(Asturias - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 6 + 2a = 0 \implies a = -3$$

- Si $a \neq -3 \quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -3 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = -3$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x = \lambda & \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda - (1 - 2\lambda) - 3z = -1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2\lambda + y = 1 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \ , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

c) Si hay una solucíón con $x = 1$ ha de verificar el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y + az = -1 \\ 2x + y = 1 \\ y + 2z = 1 \end{cases} \xRightarrow{x=1} \begin{cases} 1 - y + az = -1 \xRightarrow[z=1]{y=-1} \boxed{a = -3} \\ 2 + y = 1 \implies y = -1 \\ y + 2z = 1 \xRightarrow{y=-1} z = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto para $a = -3$, la solución sería $x = 1 \quad \& \quad y = -1 \quad \& \quad z = 1$.

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

> *Sean $A,\ B \in \mathbb{R} \quad \& \quad f(x) = \dfrac{x^2 + A}{Bx - 1}$. Se pide:*
>
> *a) (0.75 puntos) Calcular A y B para que la gráfica de la función pase por el punto $(0, -3)$ y tenga un extremo relativo en $x = -1$.*
>
> *b) (1.25 puntos) Para los valores de $A = 3$ y $B = 1$, estudia si la función tiene asíntotas y extremos relativos.*
>
> *c) (0.5 puntos) Para los valores $A = 3$ y $B = 1$, y basándose en los resultados obtenidos en el apartado anterior, realice un esbozo de la función.*
>
> *(Asturias - Matemáticas II - Julio 2023)*

Solución.

$$f(x) = \frac{x^2 + A}{Bx - 1} \quad \& \quad f'(x) = \frac{2x \cdot (Bx - 1) - B \cdot (x^2 + A)}{(Bx - 1)^2} = \frac{Bx^2 - 2x - AB}{(Bx - 1)^2}$$

a)
- Pasa por $(0, -3) \implies f(0) = -3 \implies \dfrac{A}{-1} = -3 \implies \boxed{A = 3}$
- E. rel $x = -1 \Rightarrow f'(-1) = 0 \Rightarrow \dfrac{B + 2 - AB}{(-B - 1)^2} = 0 \xRightarrow{A=3} 2 - 2B = 0 \Rightarrow \boxed{B = 1}$

b) Para $A = 3$ y $B = 1 \implies f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x - 1} \quad \& \quad f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$

- `Dominio:` $x - 1 = 0 \implies \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$
- `A. Vertical:` $\exists$A.V. en $x = 1$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} = \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \left[\frac{4}{0}\right] = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

- `A. Horizontal:` $y = \displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \pm\infty \implies \nexists \underset{x \to \pm\infty}{A.H.}$
- `A. Oblicua:` $y = mx + n \implies \exists \underset{x \to \pm\infty}{A.O.}$ en $y = x + 1$

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 3}{x^2 - x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 1$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - mx\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 3}{x - 1} - x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{x^2} + 3 - \cancel{x^2} + x}{x - 1}$$

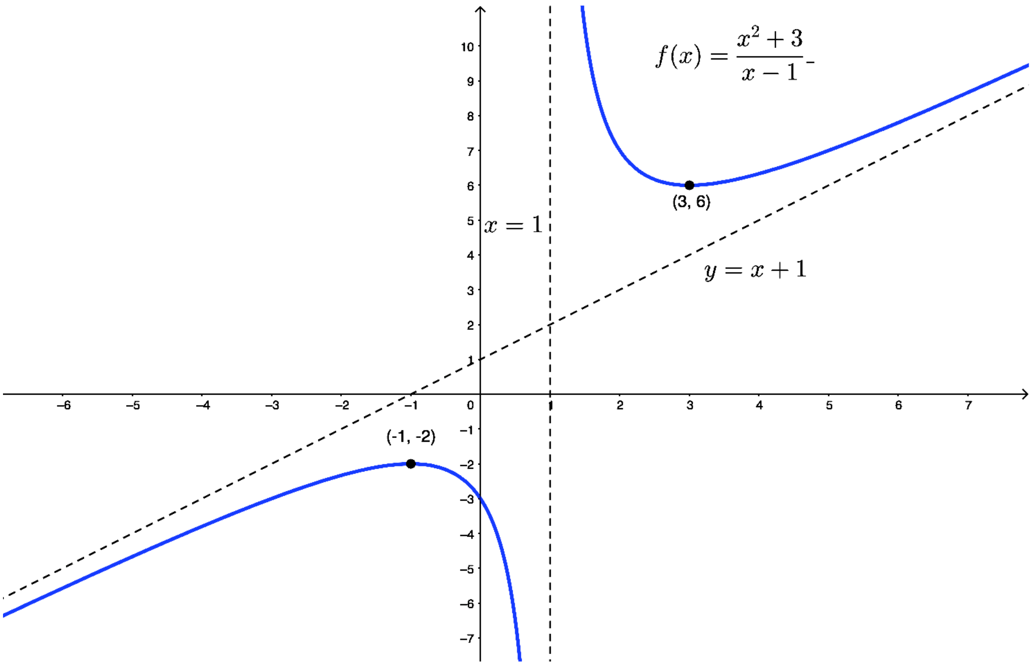
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3+x}{x-1} = 1$$

- `E. rel.` $f'(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = 0 \implies x^2-2x-3=0 \implies x = \{-1,3\}$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,3)$	$(3,+\infty)$
Signo $f'(x)$	$+$	-	-	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$ y *decreciente* en $(-1,1)\cup(1,3)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(3,6)$ y un *máximo relativo* en $(-1,-2)$.

c) Recopilamos los resultados obtenidos para esbozar la gráfica de la función:



Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Se considera la función $f(x) = x \cdot e^{2x^2}$. Se pide:

a) (1.5 puntos) Calcula una primitiva de $f(x)$, que pase por el punto $(0, -1)$. (Sugerencia: Puedes utilizar el cambio de variable $t = 2x^2$).

b) (1 punto) Calcula el área encerrada por la gráfica de f, las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

(Asturias - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

a) $$F(x) = \int f(x)\,dx = \int x \cdot e^{2x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int \underbrace{4x}_{u'} \cdot \underbrace{e^{2x^2}}_{e^u}\,dx = \frac{1}{4} \cdot e^{2x^2} + C$$

$$F(0) = -1 \implies \frac{1}{4} + C = -1 \implies C = -\frac{5}{4} \implies \boxed{F(x) = \frac{1}{4} \cdot e^{2x^2} - \frac{5}{4}}$$

b) $f(x) = x \cdot e^{2x^2} = 0 \implies x = 0$. La función define entre las rectas $x = 0$ y $x = 1$ un único recinto de integración $A_1 : (0, 1)$

$$A_1 = \int_0^1 x \cdot e^{2x^2}\,dx = \left.\frac{1}{4} \cdot e^{2x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{4} \cdot e^2 - \frac{1}{4}$$

$$\text{Área} = |A_1| = \frac{1}{4} \cdot e^2 - \frac{1}{4} \simeq 1.597\ u^2$$

Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)

Sea s la recta de ecuación $x-2=\dfrac{y-2}{-1}=z$, r la recta que pasa por los puntos $A=(1,0,1)$ y $B=(2,1,2)$.

a) (1 punto) Indica la posición relativa de r y s.

b) (0.75 puntos) Calcula el plano paralelo a r y que contiene a s.

c) (0.75 puntos) Calcula la distancia entre las rectas r y s.

(Asturias - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} A(1,0,1) \\ \vec{d_r}=\overrightarrow{AB}=(1,1,1) \end{cases} \quad \& \quad s \equiv \begin{cases} S(2,2,0) \\ \vec{d_s}=(1,-1,1) \end{cases} \quad \& \quad \overrightarrow{AS}=(1,2,-1)$$

a) $\dfrac{1}{1} \neq \dfrac{1}{-1} \neq \dfrac{1}{1} \implies \vec{d_r} \nparallel \vec{d_s} \implies r$ y s se cortan o se cruzan

$$\left[\vec{d_r},\vec{d_s},\overrightarrow{AS}\right]=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=4\neq 0 \implies r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

b) $$\pi \equiv \begin{cases} \pi \parallel r \\ s \in \pi \end{cases} \equiv \begin{cases} S(2,2,0) \\ \vec{u}=\vec{d_r}=(1,1,1) \\ \vec{v}=\vec{d_s}=(1,-1,1) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_\pi=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(2,0,-2)\approx(1,0,-1)$$

$$x-z+D=0 \implies S\in\pi \implies 2+D=0 \implies D=-2 \implies \boxed{\pi \equiv x-z-2=0}$$

c) $$d(r,s)=\frac{\left|\left[\vec{d_r},\vec{d_s},\overrightarrow{AS}\right]\right|}{\left|\vec{d_r}\times\vec{d_s}\right|}=\frac{|4|}{|(2,0,-2)|}=\frac{4}{\sqrt{8}}=\sqrt{2}\ u$$

Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)

Dados dos planos $\pi \equiv x+y+z=3 \quad \& \quad \pi' \equiv x+y=3$ y el punto $A=(2,1,6)$.

a) (0.75 puntos) Calcula un vector director y un punto de la recta r intersección de los planos π y π'.

b) (1 punto) Calcula el punto P de π tal que el segmento AP es perpendicular al plano π.

c) (0.75 puntos) Calcula el punto A' simétrico de A respecto del plano π.

(Asturias - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

a) $r \equiv \pi \cap \pi' \equiv \begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y=3 \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} R(3,0,0) \\ \vec{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,1,0) \end{cases}$

b) $r \equiv \begin{cases} r \perp \pi \\ A \in r \end{cases} \equiv \begin{cases} A(2,1,6) \\ \vec{d_r} = \vec{n}_\pi = (1,1,1) \end{cases} \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 6+\lambda \end{cases}$

$P = r \cap \pi \implies 2+\lambda+1+\lambda+6+\lambda = 3 \implies \lambda = -2 \implies \boxed{P(0,-1,4)}$

c) $P = M_{\overline{AA'}} = \dfrac{A+A'}{2} \Rightarrow A' = 2P - A = 2\cdot(0,-1,4)-(2,1,6) \implies \boxed{A'(-2,-3,2)}$

Ejercicio 7 (2.5 *puntos*)

Una imprenta compra la tinta a dos empresas distintas. En la empresa A compra el 60 % de sus pedidos, y el resto a la empresa B. Se observa que el 1.6 % de las cajas de tinta de la empresa A llegan con defecto, mientras que de la empresa B sólo el 0.9 % son defectuosas. Se toma una caja al azar:

a) (1.25 puntos) Calcula la probabilidad de que la caja sea defectuosa.

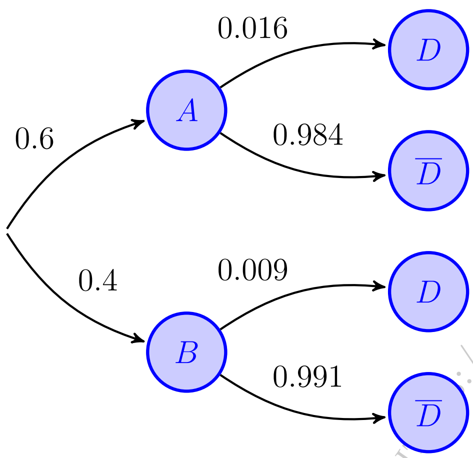
b) (1.25 puntos) Si la caja seleccionada no es defectuosa, calcule la probabilidad de que se haya comprado a la empresa A.

(Asturias - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{“La tinta se compra en la empresa } A\text{”}$$
$$B \equiv \text{“La tinta se compra en la empresa } B\text{”}$$
$$D \equiv \text{“La caja de tinta es defectuosa”}$$



a) $$\begin{aligned} P(D) &= P\big((A \cap D) \cup (B \cap D)\big) \\ &= P(A \cap D) + P(B \cap D) \\ &= P(A) \cdot P(D \mid A) + P(B) \cdot P(D \mid B) \\ &= 0.6 \cdot 0.016 + 0.4 \cdot 0.009 = 0.0132 \end{aligned}$$

b) $$P(A \mid \overline{D}) = \frac{P(A \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{P(A) \cdot P(\overline{D} \mid A)}{1 - P(D)} = \frac{0.6 \cdot 0.984}{1 - 0.0132} = 0.5982$$

Ejercicio 8 (2.5 *puntos*)

Las calificaciones de la asignatura Análisis Matemático I *de la Facultad de Matemáticas siguen una distribución* $\mathcal{N}(5,2)$.

a) *(0.75 puntos) Calcule la probabilidad de que un estudiante haya obtenido una nota mayor o igual que* 7.5.

b) *(0.75 puntos) Calcula la probabilidad de que un estudiante haya obtenido una nota entre* 3 *y* 5.

c) *(1 punto) Se modifica el sistema de enseñanza de forma que la desviación típica ahora es* 1.5 *y la probabilidad de obtener una nota menor o igual que* 6, *sea* 0.52. *¿Cuál sería la nueva media? ¿Ha funcionado el sistema aplicado?*

(Asturias - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

$$X \equiv \text{“Calificaciones de } \textit{Análisis Matemático I}\text{”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(5,2)$$

a) $P(X \geq 7.5) = P\left(Z \geq \dfrac{7.5-5}{2}\right) = P(Z \geq 1.25) = 1 - P(Z < 1.25) = 1 - 0.8944$
$= 0.1056$

b) $P(3 \leq X \leq 5) = P\left(\dfrac{3-5}{2} \leq Z \leq \dfrac{5-5}{2}\right) = P(-1 \leq Z \leq 0)$
$= P(Z \leq 0) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 0) - P(Z \geq 1)$
$= P(Z \leq 0) - [1 - P(Z < 1)] = 0.5 - (1 - 0.8413) = 0.3413$

c) $\mathcal{N}(\mu, 1.5) \quad \& \quad P(X \leq 6) = 0.52$

$$P(X \leq 6) = P\left(Z \leq \frac{6-\mu}{1.5}\right) = 0.52 \xrightarrow{\textit{Tabla}} \frac{6-\mu}{1.5} = 0.05 \implies \boxed{\mu = 5.925}$$

Por lo tanto el nuevo sistema de enseñanza ha conseguido aumentar la nota media en 0.925 puntos, luego ha funcionado.