MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2024

- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2024 (Ordinario)

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Dada la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x}-1}{x} & , \text{ si } x \neq 0 \\ a & , \text{ si } x = 0 \end{cases} , \quad a \in \mathbb{R}$$

a) (1 punto) Estudia su continuidad en R según los valores de a.

b) (1 punto) Para el valor $a = 1$, calcula los puntos de corte de la recta tangente a la curva en $x = 1$, con los ejes OX y OY.

(Aragón - Matemáticas II - Junio 2024)

Solución.

a) `Dominio:` $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

`Continuidad en` $x = 0$:

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2e^{2x}}{1} = \dfrac{2}{1} = 2$
- $f(0) = a$

$$f(x) \text{ cont. en } x = 0 \iff \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } a = 2 \Rightarrow f(x) \text{ continua en } \mathbb{R} \\ \text{Si } a \neq 2 \Rightarrow f(x) \text{ continua en } \mathbb{R} - \{0\} \end{cases}$$

b) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x}-1}{x} & , \text{ si } x \neq 0 \\ a & , \text{ si } x = 0 \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{e^{2x}\cdot(2x-1)+1}{x^2} , \text{ si } x \neq 0$$

$x_0 = 1 \Longrightarrow y_0 = f(x_0) = f(1) = e^2 - 1 \Longrightarrow (x_0, y_0) = (1, e^2 - 1)$

$m_r = f'(x_0) = f'(1) = e^2 + 1$

$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \Longrightarrow y - (e^2 - 1) = (e^2 + 1)\cdot(x - 1) \Longrightarrow r \equiv y = (e^2 + 1)x - 2$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \text{Corte con } OX\text{: } y = 0 \Rightarrow 0 = (e^2+1)x - 2 \Longrightarrow x = \dfrac{2}{e^2+1} \Longrightarrow \left(\dfrac{2}{e^2+1}, 0\right) \\ \text{Corte con } OY\text{: } x = 0 \Longrightarrow y = -2 \Longrightarrow (0, -2) \end{cases}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Calcula justificadamente el siguiente límite

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+5}-(x+2)\right].$$

(Aragón - Matemáticas II - Junio 2024)

Solución.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+5}-(x+2)\right]=[\infty-\infty]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\sqrt{x^2+5}-(x+2)\right]\cdot\left[\sqrt{x^2+5}+(x+2)\right]}{\sqrt{x^2+5}+(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5-(x+2)^2}{\sqrt{x^2+5}+(x+2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+5-\cancel{x^2}-4x-4}{\sqrt{x^2+5}+(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x+1}{\sqrt{x^2+5}+(x+2)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\frac{-4}{\sqrt{1}+1}=-2$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

a) *(1.2 puntos) Calcula a, b y $c\in\mathbb{R}$ tales que la función*

$$f(x)=ax+b\cdot\operatorname{sen}x\cdot\cos x+c$$

Sea una primitiva de $g(x)=\operatorname{sen}^2 x$.
(Nota: recuerda que $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1,\ \forall x\in\mathbb{R}$)

b) *(0.8 puntos) Sabiendo que $\operatorname{sen}(2x)=2\cdot\operatorname{sen}x\cdot\cos x$, demuestra que*

$$\cos(2x)=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x$$

(Aragón - Matemáticas II - Junio 2024)

Solución.

a) $f'(x)=a+b\cdot\left(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x\right)=\operatorname{sen}^2 x\implies a+b\cdot\left(1-\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}^2 x\right)=\operatorname{sen}^2 x$

$\implies a+b\cdot\left(1-2\operatorname{sen}^2 x\right)=\operatorname{sen}^2 x\implies a+b-2b\cdot\operatorname{sen}^2 x=\operatorname{sen}^2 x$

$$\implies\begin{cases}a+b=0\\-2b=1\end{cases}\implies\boxed{\begin{array}{c}a={}^1/_2\\ b=-{}^1/_2\\ c\in\mathbb{R}\end{array}}$$

b) $\operatorname{sen}(2x)=2\cdot\operatorname{sen}x\cdot\cos x\xRightarrow{d/dx}\cancel{2}\cdot\cos(2x)=\cancel{2}\cdot\left(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x\right)$

$\implies\cos(2x)=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x\quad$ *q.e.d.*

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Demuestra que, entre todos los rectángulos de perímetro P cm, el de mayor área es el cuadrado.

(Aragón - Matemáticas II - Junio 2024)

Solución.

Sea un rectángulo de dimensiones $x \times y$

$$\left.\begin{array}{l} P = 2x + 2y \implies y = \dfrac{P-2x}{2} \\ S(x,y) = xy \end{array}\right\} \implies S(x) = x \cdot \frac{P-2x}{2} = \frac{1}{2} \cdot Px - x^2$$

$$S'(x) = \frac{P}{2} - 2x = 0 \implies x = \frac{P}{4}$$

$$S''(x) = -2 \implies S''(P/4) = -2 < 0 \overset{(\cap)}{\implies} \text{Máximo en } x = \frac{P}{4}$$

Por lo tanto el rectángulo de superficie máxima se obtiene con unas dimensiones de: $x = \dfrac{P}{4}$ e $y = \dfrac{P - 2 \cdot \frac{P}{4}}{2} = \dfrac{P}{4}$, luego se trata de un cuadrado de lado $\dfrac{P}{4}$.

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad C = A^\top \cdot B + I_2,$$

donde $A^\top$ es la matriz traspuesta de A, e I_2 es la matriz identidad de orden 2.

a) (0.8 puntos) Calcula C^{2n}, con $n \in \mathbb{N}$.

b) (1.2 puntos) Resuelva la ecuación $C \cdot X = 5(A^\top \cdot B)$.

(Aragón - Matemáticas II - Junio 2024)

Solución.

a) $$C = A^\top \cdot B + I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^2 = C \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5I_2$$

$$\implies C^{2n} = (C^2)^n = (5I_2)^n = 5^n \cdot I_2^n = 5^n I_2 \implies \boxed{C^{2n} = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}}$$

b) $$C \cdot X = 5(A^\top \cdot B) \implies \underbrace{C^{-1} \cdot C}_{I_2} \cdot X = 5C^{-1} \cdot (A^\top \cdot B) \xRightarrow{C = A^\top \cdot B + I_2}$$

$$X = 5C^{-1}\cdot(C-I_2) = 5\underbrace{C^{-1}\cdot C}_{I_2} - 5C^{-1} = 5I_2 - 5I_2\cdot C^{-1} \overset{5I_2=C^2}{=} 5I_2 - C^2\cdot C^{-1}$$

$$= 5I_2 - C\cdot\underbrace{C\cdot C^{-1}}_{I_2} = 5I_2 - C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 6 (2 *puntos*)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 6 & m-6 \\ 2 & -3 & m+6 \end{pmatrix}$, *con* $m \in \mathbb{R}$ *un parámetro.*

a) (1.2 puntos) Estudia el rango de la matriz A *en función del parámetro* $m \in \mathbb{R}$.

b) (0.8 puntos) Resuelve, si es posible, el sistema homogéneo $A \cdot X = \mathcal{O}$ *cuando* $m = 6$.

(Aragón - Matemáticas II - Junio 2024)

Solución.

a) $|A| = 0 \ \forall m \in \mathbb{R} \Longrightarrow \text{ran}(A) < 3 \quad \& \quad \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -3 & m+6 \end{vmatrix} = -3m - 6 = 0 \Rightarrow m = -2$

- Si $m \neq -2 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 2$
- Si $m = -2 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 6 & -8 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{ran}(A) = 1$

b) Resolvemos el sistema para $m = 6$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero del apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 12 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow 2x - 3\lambda + 0 = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y = \lambda & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = 0 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 3\lambda/2 \\ y = \lambda \quad , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{array}}$$

Ejercicio 7 (2 *puntos*)

> *Analizamos en un comercio, los precios de tres artículos A, B y C. El producto A, es de primera necesidad y tiene un tipo superreducido de IVA del 4 %; el producto B es de alimentación y tiene un tipo reducido de IVA del 10 % y el artículo C es un pequeño electrodoméstico, cuyo tipo de IVA es del 21 %.*
> *El precio total, sin IVA de la compra de 1 artículo A de primera necesidad, 2 productos B de alimentación y 5 pequeños electrodomésticos C es de 483€. Mientras que el total de IVA correspondiente a la compra de 100 artículos de primera necesidad A, 10 productos de alimentación B y 100 pequeños electrodomésticos C, es de 1954€. Además, se sabe que el precio sin IVA del pequeño electrodoméstico es igual al precio sin IVA de cuatro artículos de primera necesidad más 8 artículos de alimentación.*
> *Calcula los precios a la venta de los tres artículos, teniendo en cuenta que el precio a la venta es el precio con IVA incluido.*
>
> *(Aragón - Matemáticas II - Junio 2024)*

Solución.

Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{“Precio sin IVA del producto } A\text{”}$$
$$y \equiv \text{“Precio sin IVA del producto } B\text{”}$$
$$z \equiv \text{“Precio sin IVA del producto } C\text{”}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = 483 \\ 0.04 \cdot 100x + 0.1 \cdot 10y + 0.21 \cdot 100z = 1954 \\ z = 4x + 8y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 2y + 5z = 483 \\ 4x + y + 21z = 1954 \\ 4x + 8y - z = 0 \end{cases}$$

$$A/A^{*} * = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 483 \\ 4 & 1 & 21 & 1954 \\ 4 & 8 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2 - 4F_1 \\ F_3 - 4F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 483 \\ 0 & -7 & 1 & 22 \\ 0 & 0 & -21 & -1932 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{lll} \Rightarrow x + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 92 = 483 & \Rightarrow & \boxed{x = 3 \text{ €}} \\ \Rightarrow -7y + 92 = 22 & \Rightarrow & \boxed{y = 10 \text{ €}} \\ \Rightarrow -21z = -1932 & \Rightarrow & \boxed{z = 92 \text{ €}} \end{array}$$

Con lo que los precios a la venta de los tres artículos es:

Artículo A: $1.04 \cdot 3 = 3.12$ €
Artículo B: $1.10 \cdot 10 = 11$ €
Artículo C: $1.21 \cdot 92 = 111.32$ €

Ejercicio 8 (2 *puntos*)

Dados los puntos $P_1(-2,1,1)$, $P_2(0,a,-2)$, $P_3(-1,1,-1)$ y $P_4(1,3,-3)$, se pide:

a) (1.2 puntos) Calcula los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que el tetraedro con vértices P_1, P_2, P_3 y P_4 tenga volumen $1/3$.

b) (0.8 puntos) Calcula el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que los cuatro puntos sean coplanarios.

(Aragón - Matemáticas II - Junio 2024)

Solución.

a) $\overrightarrow{P_1P_2} = (2, a-1, -3) \qquad \& \qquad \overrightarrow{P_1P_3} = (1,0,-2) \qquad \& \qquad \overrightarrow{P_1P_4} = (3,2,-4)$

$$\text{Vol}_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6} \cdot \left| \left[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4} \right] \right| = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{vmatrix} 2 & a-1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot |4-2a| = \frac{1}{3}$$

$$\Longrightarrow |4-2a| = 2 \Longrightarrow \begin{cases} 4-2a = -2 \Longrightarrow \boxed{a=3} \\ 4-2a = 2 \Longrightarrow \boxed{a=1} \end{cases}$$

b) $P_1\,, P_2\,, P_3$ y P_4 coplanarios $\iff \left[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4} \right] = 0 \Rightarrow 4-2a = 0 \Rightarrow \boxed{a=2}$

Ejercicio 9 (2 *puntos*)

Una asignatura de matemáticas de la Escuela de Ingeniería y Arquitectura de la Universidad de Zaragoza tiene 99 *personas matriculadas* (54 *alumnas y* 45 *alumnos). En primera convocatoria aprueban la asignatura* 49 *personas* (28 *alumnas y* 21 *alumnos).*

a) (1.2 puntos) ¿Cuál es el porcentaje de alumnas que aprueban la asignatura en primera convocatoria?, ¿y de alumnos?

b) (0.8 puntos) Si elegimos aleatoriamente a una persona que haya aprobado la asignatura en primera convocatoria, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

(Aragón - Matemáticas II - Junio 2024)

Solución.

Sean los sucesos:

$H \equiv$ "El estudiante es un chico"
$M \equiv$ "La estudiante es una chica"
$A \equiv$ "El estudiante ha aprobado la asignatura en primera convocatoria"

Vamos a resolver el problema con una tabla de contingendia (datos en negro)

	M	H	**Total**
A	28	21	49
$\overline{A}$	26	24	50
Total	54	45	99

a) $P(A \mid M) = \dfrac{28}{54} = 0.5185 \Rightarrow 51.85\,\%$

$P(A \mid H) = \dfrac{21}{45} = 0.4667 \Rightarrow 46.67\,\%$

b) $P(M \mid A) = \dfrac{28}{49} = 0.5714 \Rightarrow 57.14\,\%$

Ejercicio 10 (2 *puntos*)

Vamos a suponer que durante el año 2023, las llegadas de turistas a nuestro país, se realizaron de la siguiente forma: un 55 % llegó en avión, un 30 % llegó en tren, un 10 % llegó en autobús y un 5 % en barco. Además, sabemos que, de todos estos viajeros, visitaron Aragón el 50 % de los que vinieron en avión, el 60 % de los que vinieron en tren, el total de los que viajaron en autobús, y un 20 % de los que vinieron en barco. Con estos datos, se pide:

a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un turista seleccionado al azar entre los que visitaron España en 2023 haya visitado Aragón.

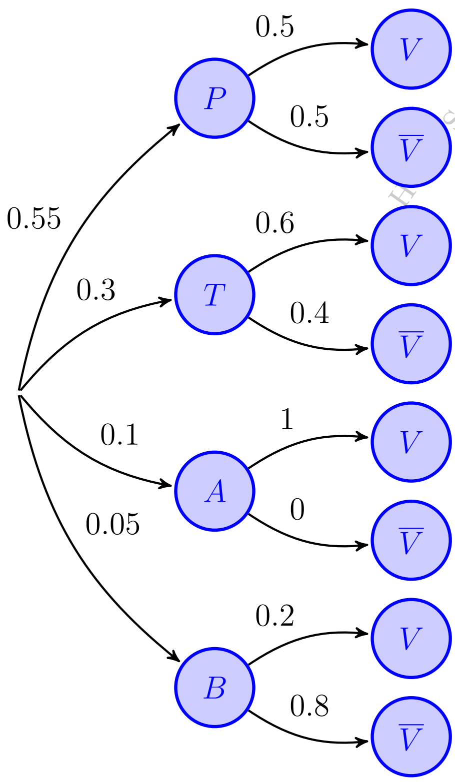
b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un turista visitante de Aragón haya hecho su viaje a España en autobús o en tren.

(Aragón - Matemáticas II - Junio 2024)

Solución.

Sean los sucesos:

$$\begin{aligned}
P &\equiv \text{“El turista viaja en avión”}\\
T &\equiv \text{“El turista viaja en tren”}\\
A &\equiv \text{“El turista viaja en autobús”}\\
B &\equiv \text{“El turista viaja en barco”}\\
V &\equiv \text{“El turista visita Aragón”}
\end{aligned}$$



a)
$$\begin{aligned}
P(V) &= P\big((P\cap V)\cup(T\cap V)\cup(A\cap V)\cup(B\cap V)\big)\\
&= P(P\cap V)+P(T\cap V)+P(A\cap V)+P(B\cap V)\\
&= P(P)\cdot P(V \mid P) + P(T)\cdot P(V \mid T)\\
&+ P(A)\cdot P(V \mid A) + P(B)\cdot P(V \mid B)\\
&= 0.55\cdot 0.5 + 0.3\cdot 0.6 + 0.1\cdot 1 + 0.05\cdot 0.2\\
&= 0.565
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
P\big((A\cup T) \mid V\big) &= \frac{P\big((A\cup T)\cap V\big)}{P(V)}\\
&= \frac{P\big((A\cap V)\cup(T\cap V)\big)}{P(V)}\\
&= \frac{P(A\cap V)+P(T\cap V)}{P(V)}\\
&= \frac{P(A)\cdot P(V \mid A)+P(T)\cdot P(V \mid T)}{P(V)}\\
&= \frac{0.3\cdot 0.6+0.1\cdot 1}{0.565} = 0.4956
\end{aligned}$$