

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
206-MATEMÁTICAS II
EBAU2023 - JUNIO

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las cuatro primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

1: Una papelería vende bolígrafos, rotuladores y libretas. Una libreta cuesta el doble que un bolígrafo y un rotulador juntos, un bolígrafo cuesta la sexta parte que una libreta, y un rotulador cuesta el doble que un bolígrafo.

- [0,75 p.]** Denotando por x el precio de cada bolígrafo, por y el de cada rotulador y por z el de cada libreta, plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que represente los datos del ejercicio.
- [0,25 p.]** Justifique que, con estos datos, no se puede conocer el precio de cada uno de los tres productos.
- [1 p.]** Calcule el conjunto de todas las posibles soluciones del sistema.
- [0,5 p.]** Sabiendo que una libreta cuesta 18 euros, calcule el precio de cada producto.

2: Considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & a \\ -1 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

- [0,5 p.]** Determine para qué valores del parámetro a la matriz A es regular (o invertible).

Se sabe que cuando $a = -2$ la matriz A es regular (o invertible). Para ese valor de a :

- [1 p.]** Calcule la inversa de A y compruebe que $A \cdot A^{-1} = I$, con I la matriz identidad de orden 2.
- [1 p.]** Resuelva la ecuación matricial $AXA^{-1} + B = C^T$, donde C^T denota la matriz traspuesta de C .

3: Calcule los siguientes límites:

- [1,25 p.]** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - 1}{x \operatorname{sen}(x)}.$
- [1,25 p.]** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - \sqrt{9-x}}{3x}.$

4: Considere la función $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$, definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$.

- [0,5 p.]** Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- [0,5 p.]** Calcule la derivada de $f(x)$ y determine los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función $f(x)$.
- [1 p.]** Calcule la integral indefinida de la función $f(x)$.
- [0,5 p.]** Determine la primitiva de $f(x)$ que pasa por el punto $(1, 1)$.

El examen continúa por detrás

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
206-MATEMÁTICAS II
EBAU2023 - JUNIO

5: Considere las siguientes rectas:

$$r : \begin{cases} x - 2y = 5 \\ y + z = 0 \end{cases} \quad y \quad s : \frac{x - 8}{2} = \frac{y + 3}{1} = \frac{z - 3}{-1}.$$

- a) **[1 p.]** Compruebe que ambas rectas son paralelas.
- b) **[1 p.]** Compruebe que el punto $P = (7, 1, -1)$ está en la recta r y calcule su proyección ortogonal sobre la recta s .
- c) **[0,5 p.]** Calcule la distancia entre ambas rectas.

6: Considere el plano π de ecuación $\pi : 3x - y - 2z = 5$ y la recta r dada por

$$r : \frac{x - a}{1} = \frac{y - 3 + a}{1} = \frac{z}{1}.$$

- a) **[1,25 p.]** Estudie la posición relativa del plano π y de la recta r en función del parámetro a .

Se sabe que cuando $a = 0$ la recta r es paralela al plano π . Para ese valor de a :

- b) **[0,75 p.]** Calcule la distancia de la recta r al plano π .
- c) **[0,5 p.]** Calcule la ecuación general (o implícita) del plano que contiene a la recta r y es paralelo al plano π .

7: Dos urnas A y B contienen bolas de colores con la siguiente composición: La urna A contiene 3 bolas verdes, 3 bolas rojas y 4 bolas negras, y la urna B contiene 1 bola verde, 3 bolas rojas y 5 bolas negras. Se saca al azar una bola de la urna A y se mete en la urna B. A continuación, se saca al azar una bola de la urna B. Calcule:

- a) **[0,5 p.]** La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea negra, sabiendo que la bola que se sacó de la urna A era verde.
- b) **[1 p.]** La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea negra.
- c) **[1 p.]** La probabilidad de que la bola que se sacó de la urna A fuera verde, sabiendo que la bola se ha sacado de la urna B ha sido negra.

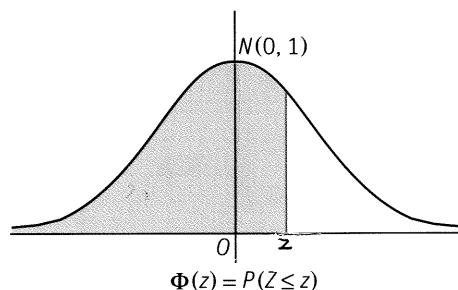
8: En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.

Se lanza una moneda al aire 100 veces y se anota el resultado del lanzamiento, que puede ser cara o cruz con la misma probabilidad. Determine:

- a) **[0,5 p.]** Qué distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de veces que sale cara.
- b) **[0,5 p.]** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.
- c) **[0,5 p.]** Cuál es la probabilidad de que salga cara 60 veces.
- d) **[1 p.]** Cuál es la probabilidad de que el número de veces que sale cara sea mayor o igual que 55.

DISTRIBUCIÓN NORMAL $N(0, 1)$

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad -\infty < z < +\infty$$



x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
206-MATEMÁTICAS II
EBAU2023 - JUNIO

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN

OBSERVACIONES GENERALES:

El corrector deberá ajustarse a los criterios de evaluación establecidos en este documento y en la reunión correspondiente. En ningún caso se podrá puntuar por encima de la valoración indicada en cada apartado. Se procurará que, en lo posible, los errores en un apartado no afecten a otros apartados.

Los errores simples de cálculo restarán entre 0,1 y 0,25 puntos. Los errores importantes de cálculo o errores simples reiterados pueden conllevar puntuación 0 en ese apartado. Si un error simple ha llevado a un problema más sencillo se disminuirá la puntuación.

Las preguntas contestadas correctamente sin incluir el desarrollo necesario para llegar a su resolución serán valoradas con 0 puntos.

Se valorará el correcto uso del vocabulario y de la notación. El alumno puede elegir el método que considere más oportuno para la resolución de una cuestión pero, si esto demuestra la falta de comprensión de conocimientos básicos, la puntuación final puede ser menor que la indicada para dicha cuestión.

OBSERVACIONES PARTICULARES:

CUESTIÓN 1: [2,5 p.]

a) Planteamiento correcto del sistema de ecuaciones a resolver **[0,75 p.]:**

$$\begin{cases} 2x + 2y - z = 0 \\ 6x - z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

b) Justificación de que se trata de un sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones) con $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 < 3 = \text{número de incógnitas}$ **[0,25 p.]:**

c) Solución correcta del sistema en función de un parámetro **[1 p.]:**

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 6\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

d) Cálculo correcto de la solución en el caso en que el precio de una libreta sea 18 euros ($\lambda = 3$) **[0,5 p.]:**

$$x = 3, \quad y = 6, \quad z = 18.$$

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
206-MATEMÁTICAS II
EBAU2023 - JUNIO

CUESTIÓN 2: [2,5 p.]

a) Determinación correcta de que A es regular si y solo si $|A| = a^2 + a \neq 0 \iff a \neq 0$ y $a \neq -1$. Es decir, A es regular para todo valor de a distinto de 0 y de -1 **[0,5 p.]**.

b) Cálculo correcto de $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}$ **[0,75 p.]**. Comprobación de que $A \cdot A^{-1} = I$ **[0,25 p.]**.

c) Expresión correcta de X en términos de A , A^{-1} , B y C^T como $X = A^{-1} \cdot (C^T - B) \cdot A$ (aunque no es obligatorio hacerlo así) **[0,5 p.]**. Cálculo correcto de la solución numérica $X = \begin{pmatrix} 30 & 32 \\ -23 & -24 \end{pmatrix}$ **[0,5 p.]**.

Si se calcula directa y correctamente el valor numérico de $X = \begin{pmatrix} 30 & 32 \\ -23 & -24 \end{pmatrix}$ **[1 p.]**.

CUESTIÓN 3: [2,5 p.]

a) Cálculo correcto de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - 1}{x \sin(x)} = -2$ por cualquier método válido **[1,25 p.]**.

b) Cálculo correcto de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - \sqrt{9-x}}{3x} = \frac{1}{9}$ por cualquier método válido **[1,25 p.]**.

CUESTIÓN 4: [2,5 p.]

a) Cálculo correcto de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$ por cualquier método válido **[0,5 p.]**.

b) Cálculo correcto de la derivada $f'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$ **[0,25 p.]**.

Justificación de que la función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y creciente en el intervalo $(0, +\infty)$ **[0,25 p.]**.

c) Cálculo correcto y justificado de la integral indefinida $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = x - \arctg x + C$ **[1 p.]**.

d) Determinación correcta de la primitiva $F(x) = x - \arctg x + \frac{\pi}{4}$ que cumple la condición $F(1) = 1$ **[0,5 p.]**.

CUESTIÓN 5: [2,5 p.]

a) Justificación correcta y razonada de que las dos rectas son paralelas **[1 p.]**.

b) Comprobación correcta y razonada de que el punto $P = (7, 1, -1)$ está en la recta r **[0,25 p.]**. Cálculo correcto y razonado de la proyección ortogonal de P sobre la recta s por cualquier método válido, obteniendo el punto $Q = (10, -2, 2)$ **[0,75 p.]**.

c) Cálculo correcto de la distancia entre ambas rectas por cualquier método válido (incluyendo la aplicación directa de la fórmula), obteniendo la distancia $d(r, s) = d(P, Q) = 3\sqrt{3}$ **[0,5 p.]**.

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
206-MATEMÁTICAS II
EBAU2023 - JUNIO

CUESTIÓN 6: [2,5 p.]

a) Justificación correcta y razonada de que la recta es paralela al plano para todo valor de a distinto de 2 **[0,75 p.]**. Justificación correcta y razonada de que la recta está contenida en el plano para $a = 2$. **[0,5 p.]**.

b) Cálculo correcto de la distancia entre la recta y el plano por cualquier método válido (incluyendo la aplicación directa de la fórmula), obteniendo la distancia $d(r, \pi) = \frac{8}{\sqrt{14}} = \frac{4\sqrt{14}}{7}$ **[0,75 p.]**.

c) Cálculo correcto de la ecuación general del plano, obteniendo el plano $3x - y - 2z = -3$ **[0,5 p.]**.

CUESTIÓN 7: [2,5 p.]

a) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida, obteniendo $P(N_B/V_A) = 1/2 = 0,5$ **[0,5 p.]**.

b) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida, obteniendo $P(N_B) = 54/100 = 0,54$ **[1 p.]**.

c) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida, obteniendo $P(V_A/N_B) = 15/54 = 0,2778$ **[1 p.]**.

CUESTIÓN 8: [2,5 p.]

a) Justificación de que se trata de una distribución binomial de parámetros $n = 100$ y $p = 0,5$ **[0,5 p.]**.

b) Cálculo correcto de la media $\mu = np = 50$ **[0,25 p.]**. Cálculo correcto de la desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = 5$ **[0,25 p.]**.

c) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida obteniendo $P(X = 60) = 0,0108$ **[0,5 p.]**. Esto puede hacerse ya sea aplicando la aproximación de la binomial por la normal y la corrección por continuidad de Yates o bien utilizando la fórmula y la calculadora, ya que redondeando al cuarto decimal se llega al mismo resultado.

Si se contesta $P(X = 60) = \binom{100}{60} 0,5^{100}$, sin dar el valor numérico **[0,25 p.]**.

d) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida, aplicando la aproximación de la binomial por la normal y la corrección por continuidad de Yates, obteniendo $P(X \geq 55) = 0,1841$ **[1 p.]**.