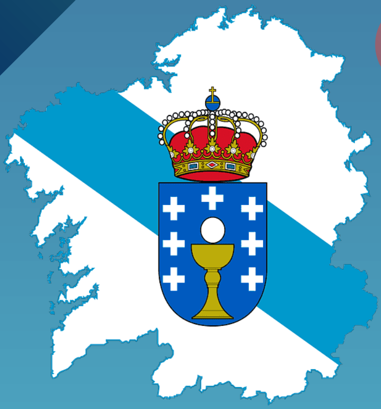
# MATEMATICAS II
# EXAMENES RESUELTOS



# EVAU JUNIO 2023
## - Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

# Junio 2023

**Ejercicio 1 (2 *puntos*)**

*Despeje la matriz $X$ de la ecuación $XA = A + XB$, si $A$ y $B$ son matrices cuadradas tales que $A - B$ es invertible.*

*Luego, calcule $X$ si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ & $B = (A^2 - A - I)^{-1}$ , donde $I$ es la matriz identidad de orden 2.*

*(Galicia - Matemáticas II - Junio 2023)*

**Solución.**

$$XA = A + XB \implies XA - XB = A \implies X \cdot (A - B) = A$$

$$\implies X \cdot \underbrace{(A - B) \cdot (A - B)^{-1}}_{I} = A \cdot (A - B)^{-1} \implies \boxed{X = A \cdot (A - B)^{-1}}$$

$$B = (A^2 - A - I)^{-1} = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1}$$

$$= \left[ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-} 1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$$X = A \cdot (A - B)^{-1} = A \cdot (A + I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 2 (2 *puntos*)**

*Discuta, según los valores de $m$, el sistema*

$$\begin{cases} mx + (2+m^2)y = 1+m \\ my - z = 1 \\ mx + 2y + (2m-4)z = 5 \end{cases}$$

*(Galicia - Matemáticas II - Junio 2023)*

**Solución.**

Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 2+m^2 & 0 & 1+m \\ 0 & m & -1 & 1 \\ m & 2 & 2m-4 & 5 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes $A$.

$$|A| = m^3 - 4m^2 = m^2 \cdot (m-4) = 0 \implies m = \{0, 4\}$$

- Si $m \neq \{0,4\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $m = 0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

- Si $m = 4 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 18 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -16 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA INCOMPATIBLE ($\nexists$ solución)

**Ejercicio 3 (2 *puntos*)**

*a) (1 punto) Si $f(x) = ae^x + b$, diga qué valores deben tener $a$ y $b$ para que se cumplan $f(0) = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 3$.*

*b) (1 punto) Estudie si la función $f(x) = x + \operatorname{sen} x$ tiene extremos o puntos de inflexión en el intervalo $(0, 2\pi)$, diga dónde están en caso de que existan y esboce la gráfica de $f$ en ese intervalo.*

*(Galicia - Matemáticas II - Junio 2023)*

**Solución.**

a)

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 3 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ae^x + b}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ae^x}{1} = a = 3 \Longrightarrow \boxed{a = 3}$
- $f(0) = 0 \Longrightarrow a + b = 0 \overset{a=3}{\Longrightarrow} 3 + b = 0 \Longrightarrow \boxed{b = -3}$

b) $f(x) = x + \operatorname{sen} x \quad \& \quad f'(x) = 1 + \cos x \quad \& \quad f''(x) = -\operatorname{sen} x \quad \& \quad f'''(x) = -\cos x$

$f'(x) = 0 \Longrightarrow 1 + \cos x = 0 \Longrightarrow \cos x = -1 \Longrightarrow x = \pi$

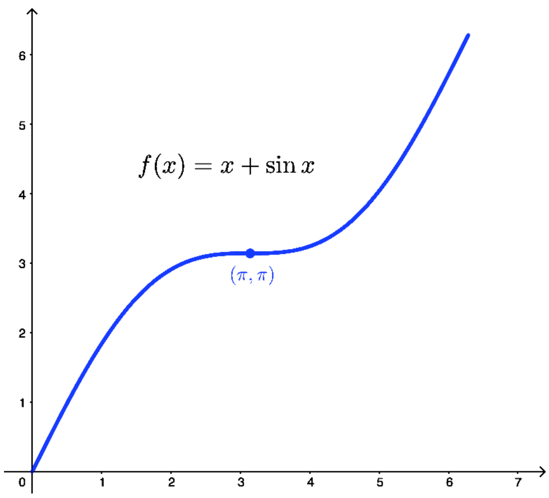
$f''(x) = -\operatorname{sen} x \Longrightarrow f''(\pi) = 0 \Longrightarrow \nexists$ Extremo relativo en $x = \pi$

$f''(x) = 0 \Longrightarrow -\operatorname{sen} x = 0 \Longrightarrow x = \pi$

$f'''(x) = -\cos x \Longrightarrow f'''(\pi) = 1 \neq 0 \Longrightarrow \exists$ P.I. en $x = \pi$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x + \operatorname{sen} x) = 0$
- $f(2\pi) = 2\pi + 0 = 2\pi \Longrightarrow (2\pi, 2\pi)$
- $f'(x) = 1 + \cos x \geq 0 \Longrightarrow f(x)$ creciente
- `Curvatura de` $f(x)$:

| | $(0, \pi)$ | $(\pi, 2\pi)$ |
|---|---|---|
| Signo $f''(x)$ | - | $+$ |
| $f(x)$ | Cóncava $\cap$ | Convexa $\cup$ |



**Ejercicio 4 (2 *puntos*)**

*Calcule el área de la región determinada por las desigualdades* $x \geq 1$, $y \leq x$ *e* $y \geq f(x)$, *con* $f(x) = x \cdot \ln x$. *Haga un esbozo gráfico de la región.*
*Nota:* $\ln x$ *es el logaritmo neperiano de* $x$.

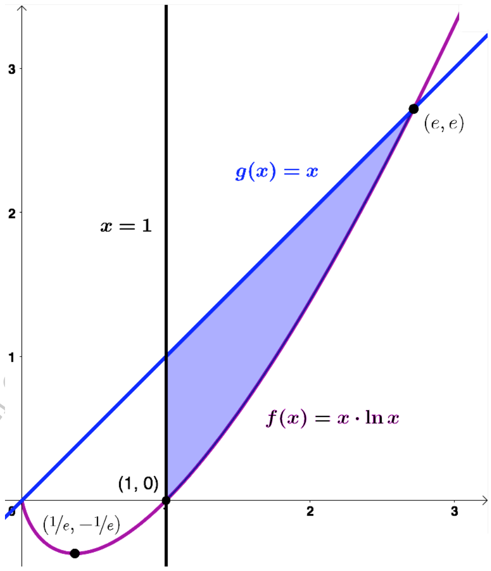
*(Galicia - Matemáticas II - Junio 2023)*

**Solución.**

- $\text{Dom} f = x \in (0, +\infty)$

- $f'(x) = 1 + \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{e}$

| | $(0, {}^1\!/_e)$ | $({}^1\!/_e, +\infty)$ |
|---|---|---|
| Signo $f'(x)$ | - | + |
| $f(x)$ | Decreciente $\searrow$ | Creciente $\nearrow$ |




$f(x)$ es *decreciente* en $(0, {}^1\!/_e)$ y *creciente* en $({}^1\!/_e, +\infty)$ y tiene un *mínimo relativo* en $({}^1\!/_e, -{}^1\!/_e)$.

- Intersección $f$ y $g$

$x{\cdot}\ln x = x \implies x{\cdot}(\ln x - 1) = 0 \implies x = \{0, e\}$

$$\text{Área} = \int_1^e [g(x) - f(x)]\, dx = \int_1^e (x - x \cdot \ln x)\, dx = \int_1^e x \cdot (1 - \ln x)\, dx$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} u = 1 - \ln x & \Rightarrow du = -\dfrac{1}{x}\, dx \\ dv = x\, dx & \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \cdot (1 - \ln x) \Bigg]_1^e + \int_1^e \frac{x^{\cancel{2}}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot (1 - \ln x) \Bigg]_1^e + \int_1^e \frac{x}{2}\, dx = \frac{x^2}{2} \cdot (1 - \ln x) + \frac{x^2}{4} \Bigg]_1^e = \frac{x^2}{4} \cdot (3 - 2 \cdot \ln x) \Bigg]_1^e$$

$$= \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} = \frac{e^2 - 3}{4} \simeq 1.097\ u^2$$

**Ejercicio 5 (2 *puntos*)**

> *a) (1 punto) Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta $r$ que pasa por los puntos $P(2,-1,0)$ y $Q(3,0,0)$ y la ecuación implícita o general del plano $\pi$ que pasa por el punto $R(0,4,-2)$ y es paralelo a los vectores $\vec{u}=(1,0,-1)$ y $\vec{v}=(2,1,-2)$.*
>
> *b) (1 punto) Calcule el ángulo agudo que forma la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{0}$ con el plano $\pi \equiv x+z+2=0$.*
>
> *(Galicia - Matemáticas II - Junio 2023)*

**Solución.**

a) $$r \equiv \begin{cases} P(2,-1,0) \\ Q(3,0,0) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} Q(3,0,0) \\ \vec{d_r} = \overrightarrow{PQ} = (1,1,0) \end{cases} \Rightarrow \boxed{r \equiv \begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \quad , \ \lambda \in \mathbb{R}}$$

$$\pi \equiv \begin{cases} R(0,4,-2) \\ \vec{u} = (1,0,-1) \\ \vec{v} = (2,1,-2) \end{cases} \Longrightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-4 & z+2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \boxed{\pi \equiv x+z+2=0}$$

b) $$r \equiv \begin{cases} P(2,-1,0) \\ \vec{d_r} = (1,1,0) \end{cases} \qquad \& \qquad \vec{n}_\pi = (1,0,1)$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\left|\vec{d_r}\cdot\vec{n}_\pi\right|}{\left|\vec{d_r}\right|\cdot\left|\vec{n}_\pi\right|} = \frac{|(1,1,0)\cdot(1,0,1)|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{|1+0+0|}{2} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \boxed{\alpha = 30°}$$

**Ejercicio 6 (2 *puntos*)**

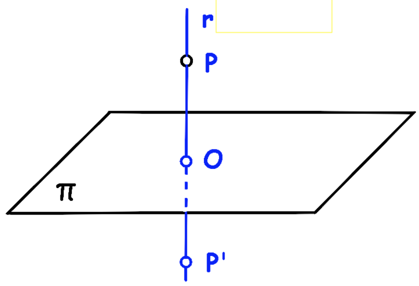
a) *(1 punto) Calcule el punto simétrico de $P(2,-1,0)$ con respecto al plano $\pi \equiv x+z+2=0$.*

b) *(1 punto) Estudie la posición relativa de las rectas $r \equiv \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{0}$ y $s \equiv \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.*

*(Galicia - Matemáticas II - Junio 2023)*

**Solución.**

a) $r \equiv \begin{cases} P(2,-1,0) \\ \vec{d}_r = \vec{n}_\pi = (1,0,1) \end{cases} \quad r \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = -1 \\ z = \lambda \end{cases}$




$$O = r \cap \pi \Rightarrow 2+\lambda+\lambda+2=0 \xrightarrow{\lambda=-2} O(0,-1,-2)$$

$$O = \frac{P+P'}{2} \Rightarrow P' = 2O - P$$

$$= 2\cdot(0,-1,-2)-(2,-1,0)$$

$$\Rightarrow \boxed{P'(-2,-1,-4)}$$

b) $r \equiv \begin{cases} R(2,-1,0) \\ \vec{d}_r = (1,1,0) \end{cases} \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = 0 \end{cases} \quad \& \quad s \equiv \begin{cases} S(2,-2,-1) \\ \vec{d}_s = (2,1,-1) \end{cases} \equiv \begin{cases} x = 2+2\mu \\ y = -2+\mu \\ z = -1-\mu \end{cases}$

$$\frac{1}{2} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{0}{-1} \implies \vec{d}_r \nparallel \vec{d}_s \implies r \text{ y } s \text{ se cortan o se cruzan en el espacio}$$

$$\left[\vec{d}_r, \vec{d}_s, \overrightarrow{RS}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies r \text{ y } s \text{ se cortan en un punto}$$

$$Q = r \cap s \implies \begin{cases} 2+\lambda = 2+2\mu \implies 2-2 = 2-2 \checkmark \\ -1+\lambda = -2+\mu \xrightarrow{\mu=-1} \lambda = -2 \\ 0 = -1-\mu \implies \mu = -1 \end{cases} \implies \boxed{Q(0,-3,0)}$$

**Ejercicio 7 (2 *puntos*)**

a) *(1 punto) Calcule las cuatro probabilidades*

$$P(A) \quad \& \quad P(A\cap\overline{B}) \quad \& \quad P(A \mid B) \quad \& \quad P(B \mid A)$$

*sabiendo que* $P(A\cup B) = 0.8 \quad \& \quad P(A\cap B) = 0.2 \quad \& \quad P(A) = 2P(B)$

*Nota:* $\overline{B}$ *es el suceso contrario o complementario de* $B$.

b) *(1 punto) En un conocido congreso, el* 60 % *de los científicos inscritos participan* online *y el resto asisten en persona. Además, el* 65 % *de los inscritos son europeos y el* 80 % *de los que asisten en persona también lo son. Si se elige al azar a uno de los inscritos, calcule la probabilidad de que sea europeo y, a la vez, participe* online*; luego la de que participe* online *si se sabe que es europeo.*

*(Galicia - Matemáticas II - Junio 2023)*

**Solución.**

a) $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cup B) \implies 0.8 = 2P(B)+P(B)-0.2 \implies P(B) = \dfrac{1}{3}$

$$P(A) = 2P(B) = 2\cdot\frac{1}{3} \implies \boxed{P(A) = \frac{2}{3}}$$

$$P(A\cap\overline{B}) = P(A) - P(A\cap B) = \frac{2}{3} - 0.2 \implies \boxed{P(A\cap\overline{B}) = \frac{7}{15}}$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0.2}{1/3} \implies \boxed{P(A \mid B) = 0.6}$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{0.2}{2/3} \implies \boxed{P(B \mid A) = 0.3}$$

b) Sean los sucesos: $O \equiv$ "El participante lo hace *online*"
$P \equiv$ "El participante lo hace presencialmente"
$E \equiv$ "El participante es europeo"

Del enunciado tenemos:

$$P(O) = 0.6 \quad \& \quad P(P) = 0.4 \quad \& \quad P(E) = 0.65 \quad \& \quad P(E \mid P) = 0.8$$

$$P(E \mid P) = \frac{P(E\cap P)}{P(P)} \implies P(E\cap P) = P(P)\cdot P(E \mid P) = 0.4\cdot 0.8 = 0.32$$

En una tabla de contingencia ponemos los datos (en negro) y la rellenamos (en azul)

| | $E$ | $\overline{E}$ | **Total** |
|---|---|---|---|
| $O$ | 0.33 | 0.27 | 0.6 |
| $P$ | 0.32 | 0.08 | 0.4 |
| **Total** | 0.65 | 0.35 | 1 |

$$P(O\cap E) = 0.33$$

$$P(O \mid E) = \frac{0.33}{0.65} = 0.5077$$

**Ejercicio 8 (2 *puntos*)**

> a) *(1 punto) En un cierto humedal, la probabilidad de que un renacuajo llegue a rana adulta es del 2 %. Si se escogen al azar 2500 de esos renacuajos, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 55 de ellos lleguen a ranas adultas?*
>
> b) *(1 punto) Para conceder becas de estudio, un organismo valora los méritos presentados y asigna a cada candidato una puntuación que indica más méritos cuanto mayor es su valor. Este año, la puntuación sigue una distribución normal de media 100 y desviación típica 20, y se toma la decisión de conceder la beca al 5 % mejor del conjunto de solicitantes. ¿Qué puntuación es preciso alcanzar para obtener la beca?*
>
> *(Galicia - Matemáticas II - Junio 2023)*

**Solución.**

a) $X \equiv$ "Nº de renacuajos que llegan a rana adulta" $\longrightarrow X : \mathcal{B}(2500, 0.02)$

$$X : \mathcal{B}(2500, 0, 02) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n = 2500 > 30 \checkmark \\ np = 50 > 5 \\ nq = 2450 > 5 \end{array} \right\} \Rightarrow Y : \mathcal{B}(np, \sqrt{npq}) = \mathcal{N}(50, 7)$$

$$P(X \geq 55) = P(Y \geq 54.5) = P\left(Z \geq \frac{54.5 - 50}{7}\right) = P(Z \geq 0.64)$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.64) = 1 - 0.7389 = 0.2611$$

b) $X \equiv$ "Puntuación del mérito académico" $\longrightarrow \mathcal{N}(100, 20)$

$$P(X \leq a) = P\left(Z \leq \frac{a - 100}{20}\right) = 0.95 \xrightarrow{Tabla} \frac{a - 100}{20} = 1.645 \Longrightarrow \boxed{a = 132.9 \text{ ptos}}$$

Por lo tanto el candidato habrá de superar los 132.9 puntos.