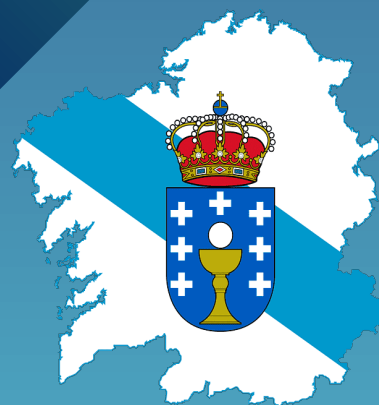


MATEMATICAS II

EXAMENES RESUELTOS



EVAU JULIO 2023

- Extraordinario -

<https://aprendeconmigomelon.com>

Iñigo Zunzunegui Monterrubio



Julio 2023 (Extraordinario)

Ejercicio 1 (2 puntos)

a) (0.75 puntos) Calcule A si $(AB)^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ & $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) (1.25 puntos) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ es invertible, obtenga los valores de x , y , z sabiendo que $\det(A - 3I) = 0$, que $y \neq 0$ y que $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.
Entiéndase que I es la matriz identidad.

(Galicia - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

a) $|B| = 2 \neq 0 \implies \exists B^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$(AB)^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \implies AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^\top \implies A \cdot \underbrace{B \cdot B^{-1}}_I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot B^{-1}$$

$$\implies A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

b) $|A - 3I| = \det \left[\begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{vmatrix} 0 & x \\ y & z-3 \end{vmatrix} = -xy = 0 \xrightarrow{y \neq 0} \boxed{x = 0}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{invertible}]{A \text{ es}} |A| = 3z \neq 0 \quad \& \quad A^{-1} = \frac{1}{3z} \cdot \begin{pmatrix} z & 0 \\ -y & 3 \end{pmatrix}$$

$$(3z)A^{-1} + I = \cancel{3z} \cdot \frac{1}{\cancel{3z}} \cdot \begin{pmatrix} z & 0 \\ -y & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+1 & 0 \\ -y & 4 \end{pmatrix}$$

$$(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} z+1 & 0 \\ -y & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z+1 = 2 \Rightarrow \boxed{z = 1} \\ -1 = -y \Rightarrow \boxed{y = 1} \end{cases}$$

_____ o _____



Ejercicio 2 (2 puntos)

Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema

$$\begin{cases} (m+1)x + z = 1 \\ (m+1)x + y + z = m+1 \\ (m+1)x + my + (m-1)z = m \end{cases}$$

(Galicia - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m+1 & 0 & 1 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 & m+1 \\ m+1 & m & m-1 & m \end{array} \right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A .

$$|A| = m^2 - m - 2 = 0 \implies m = \{-1, 2\}$$

- Si $m \neq \{-1, 2\}$ $|A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = n^\circ \text{ incóg.} \xrightarrow{\text{Rouche}} \text{SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).}$

- Si $m = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{array} \right)$

$$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq n^\circ \text{ incóg.} = 3 \xrightarrow{\text{Rouche}} \text{SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)}$

- Si $m = 2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right)$

$$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$$

$\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{\text{Rouche}} \text{SISTEMA INCOMPATIBLE (\nexists \text{ solución})}$

————— o —————

Ejercicio 3 (2 puntos)

- a) (1 punto) Enuncie los teoremas de Rolle y del valor medio del cálculo diferencial.
- b) (1 punto) Explique si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, está o no en las hipótesis del teorema del valor medio del cálculo diferencial. En caso de que lo esté, calcule un valor c para el cual se cumpla la tesis de ese teorema.

(Galicia - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

- a) ■ Th. de Rolle:

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b) , que cumple que $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

- Th. del Valor Medio:

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

- b) ■ $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ es continua en $[0, 1]$ porque $1 - x^2 \geq 0$ en dicho intervalo.

- $f(x)$ es derivable en $(0, 1)$ y su derivada vale $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$

- Según el teorema del Valor Medio $\exists c \in (0, 1) \mid f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$

$$\frac{-c}{\sqrt{1 - c^2}} = 0 - 1 \implies c = \sqrt{1 - c^2} \implies c^2 = 1 - c^2 \implies \begin{cases} c = \sqrt{2}/2 \notin (0, 1) \\ c = \sqrt{2}/2 \end{cases}$$

_____ o _____

Ejercicio 4 (2 puntos)

a) (1 punto) Calcule mediante cambio de variable las integrales

$$\int \sin^5 x \cdot \cos x \, dx \quad \& \quad \int \frac{\ln x}{x} \, dx$$

b) (1 punto) Calcule $\int \frac{\ln x}{x} \, dx$ empleando el método de integración por partes.

Luego, obtenga algún valor de B tal que $\int_e^B \frac{\ln x}{x} \, dx = \frac{3}{2}$

(Galicia - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

$$\text{a) } \blacksquare \int \sin^5 x \cdot \cos x \, dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \sin x \\ du = \cos x \, dx \end{array} \right\} = \int u^5 \, du = \frac{u^6}{6} + C = \frac{1}{6} \cdot \sin^6 x + C$$

$$\blacksquare \int \frac{\ln x}{x} \, dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x} \, dx \end{array} \right\} = \int u \, du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{2} \cdot \ln^2 x + C$$

$$\text{b) } \underbrace{\int \frac{\ln x}{x} \, dx}_{I(x)} = \int \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} \, dx \\ dv = \frac{1}{x} \, dx \Rightarrow v = \ln x \end{array} \right\} = \ln^2 x - \underbrace{\int \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx}_{I(x)}$$

$$\Rightarrow I(x) = \ln^2 x - I(x) \Rightarrow 2I(x) = \ln^2 x \Rightarrow \boxed{I(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln^2 x + C}$$

$$\int_e^B \frac{\ln x}{x} \, dx = I(B) - I(e) = \frac{1}{2} \cdot (\ln^2 B - \ln^2 e) = \frac{3}{2} \Rightarrow \ln^2 B - 1 = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ln B = -2 \Rightarrow \cancel{B = 1/e^2} \, B > e \\ \ln B = 2 \Rightarrow \boxed{B = e^2} \end{cases}$$

————— o —————

Ejercicio 5 (2 puntos)

- a) (1.5 puntos) Considérense el plano $\pi \equiv ax + y + z = 1$, donde a es un parámetro real, y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3}$. Estudie la posición relativa de π y r en función de a y obtenga el valor de a que hace que π y r sean perpendiculares. Por último, razone si r puede estar contenida en π o no.
- b) (0.5 puntos) Si $\pi \equiv -3x + y + z = 1$, diga qué valor tiene que tomar b para que $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3}$ esté contenida en π .

(Galicia - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

a) $r \equiv \begin{cases} R(1, 0, -1) \\ \vec{d}_r = (2, 3, 3) \end{cases} \quad \& \quad \vec{n}_\pi = (a, 1, 1)$

$$\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = (2, 3, 3) \cdot (a, 1, 1) = 2a + 3 + 3 = 0 \implies a = -3$$

- Si $a \neq -3 \implies \vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi \neq 0 \implies \vec{d}_r \nparallel \vec{n}_\pi \implies r$ y π se cortan en un punto

$$\vec{d}_r \parallel \vec{n}_\pi \implies \frac{2}{a} = \frac{3}{1} = \frac{3}{1} \implies a = 2/3, \text{ luego si } a = 2/3 \implies r \perp \pi$$

- Si $a = -3 \implies \vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0 \implies \vec{d}_r \perp \vec{n}_\pi \implies r \parallel \pi$ ó $r \in \pi$

$$\text{¿} R \in \pi? \xrightarrow{\pi \equiv -3x+y+z=1} -3 - 1 \neq 1 \implies R \notin \pi \implies r \parallel \pi \text{ y } \nexists a \in \mathbb{R} \mid r \in \pi$$

b) $r \equiv \begin{cases} R(1, b, -1) \\ \vec{d}_r = (2, 3, 3) \end{cases} \quad \& \quad \vec{n}_\pi = (-3, 1, 1)$

$$\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = (2, 3, 3) \cdot (-3, 1, 1) = -6 + 6 + 6 = 0 \implies \vec{d}_r \parallel \vec{n}_\pi$$

$$R \in \pi \implies -3 + b - 1 = 1 \implies \boxed{b = 5}$$

_____ o _____

Ejercicio 6 (2 puntos)

Considérese el plano $\pi \equiv 2x - y + z = 1$. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la distancia de π al punto de corte de las rectas

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 0 \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \quad \& \quad r_2 \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = -1 + \mu \\ z = 0 \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

b) (1 punto) Obtener el punto simétrico de $P(1, 0, 0)$ con respecto a π .

(Galicia - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

$$a) \quad r_1 \cap r_2 \implies \begin{cases} 2 + \lambda = \mu \xrightarrow[\mu=1]{\lambda=-1} 2 - 1 = 1 \checkmark \\ 0 = -1 + \mu \implies \mu = 1 \\ -1 - \lambda = 0 \implies \lambda = -1 \end{cases} \implies P = (1, 0, 0)$$

$$d(P, \pi) = \frac{|2 - 0 + 0 - 1|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6} u$$

$$b) \quad r \equiv \begin{cases} P(1, 0, 0) \\ \vec{d}_r = \vec{n}_\pi = (2, -1, 1) \end{cases} \quad r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

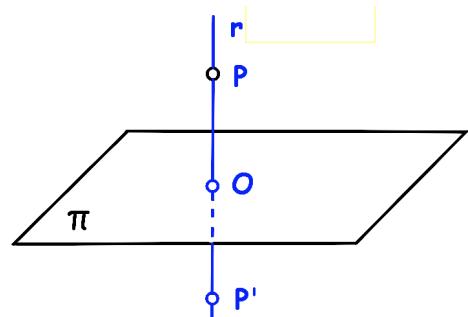
$$O = r \cap \pi \implies 2 \cdot (1 + 2\lambda) + \lambda + \lambda = 1$$

$$\xrightarrow{\lambda=-1/6} O\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right)$$

$$O = \frac{P + P'}{2} \implies P' = 2O - P$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right) - (1, 0, 0)$$

$$\implies \boxed{P'\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)}$$



Ejercicio 7 (2 puntos)

- a) (1 punto) Calcule $P(A \mid B)$ si $B \subset A$. Luego, si $P(C) = 0.5$ y $P(D) = 0.6$, explique si C y D pueden ser incompatibles.

Por último, obtenga $P(E \cup F)$ y $P(E \cap \bar{F})$ si E y F son independientes y además $P(E) = 0.3$ y $P(F) = 0.2$.

- b) (1 punto) Se tira un dado siete veces. Calcule la probabilidad de que salgan exactamente dos seises.

(Galicia - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

a) ■ $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \stackrel{B \subset A}{=} \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

■ C y D incompatibles $\implies P(C \cap D) = 0$

$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) \stackrel{0}{=} 0.5 + 0.6 = 1.1 > 1$, por lo que C y D no pueden ser incompatibles.

■ $\left. \begin{array}{l} E \text{ y } F \\ \text{Independientes} \end{array} \right\} \implies P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F) = 0.3 \cdot 0.2 = 0.06$

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = 0.3 + 0.2 - 0.06 \implies P(E \cup F) = 0.44$$

$$P(E \cap \bar{F}) = P(E) - P(E \cap F) = 0.3 - 0.06 \implies P(E \cap \bar{F}) = 0.24$$

- b) $X \equiv \text{"Nº de seises en las tiradas"} \longrightarrow X : \mathcal{B}(7, 1/6)$

$$P(X = 2) = \binom{7}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0.2344$$

_____ o _____

Ejercicio 8 (2 puntos)

Para un determinado grupo de pacientes, la tensión arterial sistólica (medida en mmHg) sigue una distribución normal de media 123.6 y desviación típica 17.8. Calcule la probabilidad de que un paciente elegido al azar tenga una tensión comprendida entre 100 y 120 mmHg. Luego, obtenga el valor de la tensión que es superada por el 67 % de los pacientes.

(Galicia - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

$X \equiv \text{"Tensión arterial sistólica (mmHg)"} \longrightarrow X : \mathcal{N}(123.6, 17.8)$

$$\begin{aligned} \blacksquare P(100 \leq X \leq 120) &= P\left(\frac{100 - 123.6}{17.8} \leq Z \leq \frac{120 - 123.6}{17.8}\right) \\ &= P(-1.33 \leq Z \leq -0.2) = P(0.2 \leq Z \leq 1.33) \\ &= P(Z \leq 1.33) - P(Z \leq 0.2) = 0.9082 - 0.5793 = 0.3289 \\ \blacksquare P(X \geq a) &= P\left(Z \geq \frac{a - 123.6}{17.8}\right) = P\left(Z \leq \frac{-a + 123.6}{17.8}\right) = 0.67 \\ &\xrightarrow{\text{Tabla}} \frac{-a + 123.6}{17.8} = 0.44 \implies \boxed{a = 115.768 \text{ mmHg}} \end{aligned}$$

_____ o _____