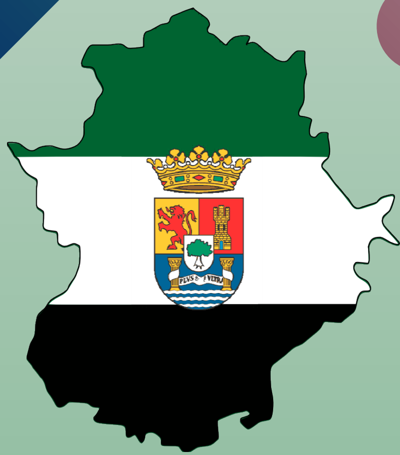
MATEMATICAS II

EXAMENES RESUELTOS



EVAU JUNIO 2023

- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2023 (Ordinario)

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Encontrar la matriz X que verifica $(A-3I)\cdot X = 2I$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e I es la matriz identidad de orden 3.

(Extremadura - Matemáticas II - Junio 2023)

Solución.

$$A-3I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A-3I| = 3 \neq 0 \implies \exists (A-3I)^{-1} \quad \& \quad \mathrm{Adj}(A-3I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-3I)^{-1} = \frac{1}{|A-3I|}\cdot \mathrm{Adj}(A-3I)^{\top} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-3I)\cdot X = 2I \implies \underbrace{(A-3I)^{-1}\cdot(A-3I)}_{I}\cdot X = (A-3I)^{-1}\cdot 2I$$

$$\implies X = (A-3I)^{-1}\cdot 2I = 2\cdot(A-3I)^{-1} = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2/3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Determinar todos los números $x \in \mathbb{R}$ para los que el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{vmatrix}$$

es mayor o igual que cero.

(Extremadura - Matemáticas II - Junio 2023)

Solución.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{vmatrix} = -x^2 + 4x - 3 \geq 0 \implies -(x-1) \cdot (x-3) \geq 0$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, +\infty)$
Signo $-x^2 + 4x - 3$	-	$+$	-

Por lo tanto la solución es $x \in [1, 3]$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Estudiar la posición relativa de los siguientes planos en función del parámetro b

$$\begin{cases} x+2y-z=2 \\ x+(1+b)y-bz=2b \\ x+by+(1+b)z=1 \end{cases}$$

(Extremadura - Matemáticas II - Junio 2023)

Solución.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1+b & -b & 2b \\ 1 & b & 1+b & 1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 2b^2 - 2b = 2b \cdot (b-1) = 0 \implies b = \{0, 1\}$$

- Si $b \neq \{0,1\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ S.C.D. (Solución única) y los planos se cortan en un punto.

- Si $b=0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ S.I. ($\nexists$ solución), y como

  $$\frac{1}{1} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{-1}{0} \qquad \& \qquad \frac{1}{1} \neq \frac{2}{0} \neq \frac{-1}{1} \qquad \& \qquad \frac{1}{1} \neq \frac{1}{0} \neq \frac{0}{1}$$

  los tres planos se cortan dos a dos en forma de prisma triangular.

- Si $b=1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ S.C.I. (Infinitas soluciones), y los tres planos se cortan en una recta. Se comprueba fácilmente que los dos primeros planos son coincidentes y el tercero los corta en la citada recta.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

> *Hallar un vector de módulo 5 que sea ortogonal a los vectores* $\vec{u} = (1,2,0)$ *y* $\vec{v} = (-1,0,1)$.
>
> *(Extremadura - Matemáticas II - Junio 2023)*

Solución.

- $\left.\begin{array}{c} \vec{w} \perp \vec{u} \\ \vec{w} \perp \vec{v} \end{array}\right\} \Longrightarrow \vec{w} = k \cdot \vec{u} \times \vec{v} = k \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = k \cdot (2,-1,2)$
- $|\vec{w}| = 5 \Longrightarrow \sqrt{9k^2} = 5 \Longrightarrow k = \pm\dfrac{5}{3}$

Por lo tanto:

$$\vec{w}_1 = (10/3, -5/3, 10/3) \qquad \& \qquad \vec{w}_2 = (-10/3, 5/3, -10/3)$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

a) *(1.5 puntos) Comprobar que hay alguna solución positiva y alguna negativa de la ecuación*

$$x \cdot \cos(2x) = x^2 - 1$$

b) *(0.5 puntos) Aproximar la solución positiva encontrada con un error menor que una décima.*

(Extremadura - Matemáticas II - Junio 2023)

Solución.

a) Sea $f(x) = x^2 - x \cdot \cos(2x) - 1$ una función continua por ser composición de funciones continuas.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f(x) \text{ continua en } [0,2] \\ \bullet\ f(0) = -1 < 0 \\ \bullet\ f(2) = 4 - 2\cdot\cos 4 - 1 > 0 \end{array}\right\} \xrightarrow[Bolzano]{Th.} \left| \begin{array}{c} \exists c \in (0,2) \mid f(c) = 0 \\ \Rightarrow c^2 - c\cdot\cos(2c) - 1 = 0 \\ \Rightarrow c\cdot\cos(2c) = c^2 - 1 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f(x) \text{ continua en } [-2,0] \\ \bullet\ f(0) = -1 < 0 \\ \bullet\ f(-2) = 4 + 2\cos -4 - 1 > 0 \end{array}\right\} \xrightarrow[Bolzano]{Th.} \left| \begin{array}{c} \exists c \in (-2,0) \mid f(c) = 0 \\ \Rightarrow c^2 - c\cdot\cos(2c) - 1 = 0 \\ \Rightarrow c\cdot\cos(2c) = c^2 - 1 \end{array}\right.$$

Luego hemos demostrado que la ecuación tiene al menos una solución positiva y otra negativa.

b) Vamos a calcular una solución aproximada por el método de las aproximaciones sucesivas, que vamos a plasmar en una tabla:

$f(a) < 0$	$f(b) > 0$	$c \in (a,b)$	$c = \frac{a+b}{2}$	$\varepsilon = b - c$	$f(c)$
$f(0) = -1$	$f(2) = 4.3$	$c \in (0,2)$	$c = 1$	$\varepsilon = 1$	$f(1) = 0.41$
$f(0) = -1$	$f(1) = 0.41$	$c \in (0,1)$	$c = 0.5$	$\varepsilon = 0.5$	$f(0.5) = -1.02$
$f(0.5) = -1.02$	$f(1) = 0.41$	$c \in (0.5,1)$	$c = 0.75$	$\varepsilon = 0.25$	$f(0.75) = -0.49$
$f(0.75) = -0.49$	$f(1) = 0.41$	$c \in (0.75,1)$	$c = 0.875$	$\varepsilon = 0.125$	$f(0.875) = -0.08$
$f(0.875) = -0.08$	$f(1) = 0.41$	$c \in (0.875,1)$	$c = 0.9375$	$\varepsilon = 0.0625$	

Si aplicamos el *Teorema de Bolzano* en el intervalo $[0.875, 1]$, se demuestra que la ecuación tiene una solución en el intervalo $(0.875, 1)$. Si cogemos como solución el centro de dicho intervalo $c = 0.9375$, estaremos cometiendo un error máximo de $\varepsilon = c - b = 1 - 0.9375 = 0.0625 < 0.1$, menor de una décima tal y como se pide en este apartado.

Ejercicio 6 (2 *puntos*)

Calcular a, b y c para que la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & ,\ si\ 0\le x<1 \\ cx & ,\ si\ 1\le x\le 4 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0,4]$.

(Extremadura - Matemáticas II - Junio 2023)

Solución.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & ,\ \text{si } 0\le x<1 \\ cx & ,\ \text{si } 1\le x\le 4 \end{cases} \quad \& \quad f'(x)=\begin{cases} 2x+a & ,\ \text{si } 0<x<1 \\ c & ,\ \text{si } 1<x<4 \end{cases}$$

Para que la función cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0,4]$, ha de verificarse:

- $f(x)$ es continua en $[0,4]$
  - $f(x)$ es continua en las dos ramas por ser polinomios
  - `Continuidad en` $x=1$:
    - $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+ax+b\right)=a+b+1$
    - $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} cx=c$
    - $f(1)=c$

  $f(x)$ continua en $x=1 \iff \lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1) \xRightarrow{a+b+1=c} ⊙\ a+b-c=-1$

- $f(x)$ es derivable en $(0,4)$
  - $f[1^-]=\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1}(2x+a)=2+a$
  - $f[1^+]=\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1} c=c$

  $f(x)$ es derivable en $x=1 \iff f'[1^-]=f'[1^+] \xRightarrow{2+a=c} ⊙⊙\ a-c=-2$

- $f(0)=f(4) \implies ⊙⊙⊙\ b=4c$

$$\begin{cases} a+b-c=-1 \xRightarrow[b=4c]{a=c-2} c-2+4c-c=-1 \implies \boxed{c=1/4} \\ a-c=-2 \implies a=c-2 \xRightarrow{c=1/4} \boxed{a=-7/4} \\ b=4c \xRightarrow{c=1/4} \boxed{b=1} \end{cases}$$

Ejercicio 7 (2 *puntos*)

Calcular la integral

$$\int \frac{17-x}{x^2+x-6}\,dx$$

(Extremadura - Matemáticas II - Junio 2023)

Solución.

$$\int \frac{17-x}{x^2+x-6}\,dx \overset{\circledast}{=} \int \frac{-4}{x+3}\,dx + \int \frac{3}{x-2}\,dx = -4\cdot\ln|x+3| + 3\cdot\ln|x-2| + C$$

$$\circledast \quad x^2+x-6 = (x+3)\cdot(x-2)$$

$$\frac{17-x}{\cancel{x^2+x-6}} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+3)}{\cancel{x^2+x-6}}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \langle\, x=-3 \,\rangle & 20 = -5A & \Rightarrow A=-4 \\ \langle\, x=2 \,\rangle & 15 = 5B & \Rightarrow B=3 \end{cases}$$

———— ∘ ————

Ejercicio 8 (2 *puntos*)

Hallar el área encerrada por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 4x$ y el eje de abscisas.

(Extremadura - Matemáticas II - Junio 2023)

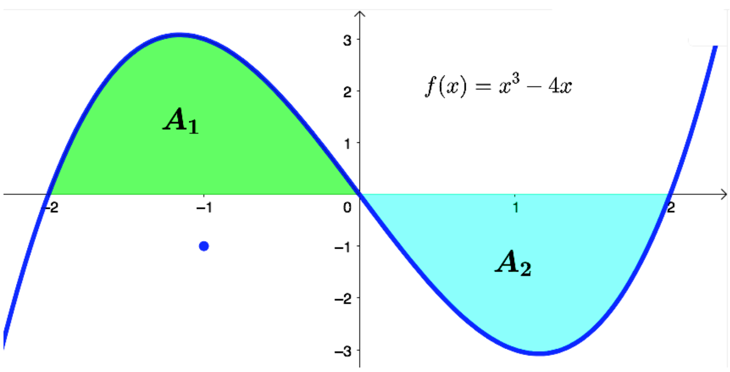
Solución.

$f(x) = x^3 - 4x = x\cdot(x^2-4) = 0 \implies x = \{-2, 0, 2\}$, lo que define dos recintos de integración $A_1 : (-2, 0)$ y $A_2 : (0, 2)$.

$$A_1 = \int_{-2}^{0} \left(x^3 - 4x\right) dx = \left.\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0} = 0 - (4-8) = 4$$

$$A_2 = \int_{0}^{2} \left(x^3 - 4x\right) dx = \left.\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{0}^{2} = (4-8) - 0 = -4$$

$$\text{Área} = |A_1| + |A_2| = 4 + 4 = 8\ u^2$$



———— ∘ ————

Ejercicio 9 (2 *puntos*)

Al 80 % de los alumnos de una clase les gusta el fútbol; al 40 % les gusta el balonmano y al 30 % les gustan ambos deportes. Si se elige un alumno al azar.

a) *(0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que le guste alguno de los dos deportes (uno o los dos)?*

b) *(0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que le guste solo el fútbol?*

c) *(0.75 puntos) Si sabemos que no le gusta el fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que le guste el balonmano?*

(Extremadura - Matemáticas II - Junio 2023)

Solución.

Sean los sucesos

$$F \equiv \text{“Al alumno le gusta el fútbol”}$$
$$B \equiv \text{“Al alumno le gusta el balonmano”}$$

Del enunciado tenemos:

$$P(F) = 0.8 \qquad \& \qquad P(B) = 0.4 \qquad \& \qquad P(F \cap B) = 0.3$$

a) $P(F \cup B) = P(F) + P(B) - P(F \cap B) = 0.8 + 0.4 - 0.3 \implies \boxed{P(F \cup B) = 0.9}$

b) $P(F \cap \overline{B}) = P(F) - P(F \cap B) = 0.8 - 0.3 \implies \boxed{P(F \cap \overline{B}) = 0.5}$

c) $P(B \mid \overline{F}) = \dfrac{P(B \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \dfrac{P(B) - P(B \cap F)}{1 - P(F)} = \dfrac{0.4 - 0.3}{1 - 0.8} \implies \boxed{P(B \mid \overline{F}) = 0.5}$

Ejercicio 10 (2 *puntos*)

Durante el día de hoy una persona va a escribir 15 mensajes en Facebook. Cada mensaje que escribe tiene errores ortográficos con una probabilidad de 0.3. Calcular:

a) (0.75 puntos) La probabilidad de que escriba exactamente 5 mensajes con errores ortográficos.

b) (0.75 puntos) La probabilidad de que escriba 4 ó más mensajes con errores.

c) (0.5 puntos) La media y la desviación típica de la distribución.

(Extremadura - Matemáticas II - Junio 2023)

Solución.

$$X \equiv \text{"Nº de mensajes con faltas de orgografía"} \longrightarrow X : \mathcal{B}(15, 0.3)$$

a) $P(X=5) = \binom{15}{5} \cdot 0.3^5 \cdot 0.7^{10} = 0.2061$

b) $$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= 1 - P(X<4) = 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)] \\ &= 1 - \left[\binom{15}{0} \cdot 0.3^0 \cdot 0.7^{15} + \binom{15}{1} \cdot 0.3^1 \cdot 0.7^{14} + \binom{15}{2} \cdot 0.3^2 \cdot 0.7^{13} \right. \\ &\left. + \binom{15}{3} \cdot 0.3^3 \cdot 0.7^{12}\right] = 1 - 0.2969 = 0.7031 \end{aligned}$$

c) $E[X] = np = 15 \cdot 0.3 = 4.5 \quad \& \quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{15 \cdot 0.3 \cdot 0.7} = 1.775$