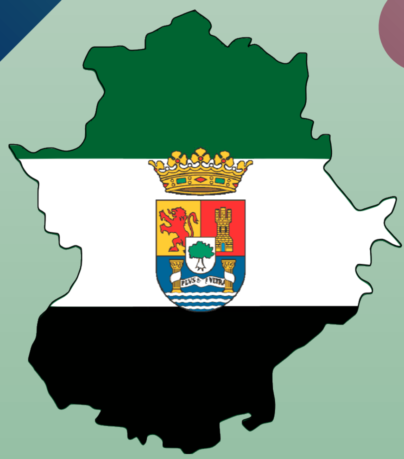
MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS



EVAU JULIO 2023
- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2023 (Extraordinario)

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Estudiar el rango de la matriz $A - \lambda \cdot I$ según los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e I es la matriz identidad de orden 3.

(Extremadura - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = -\lambda \cdot [-\lambda \cdot (3-\lambda) + 2] = -\lambda \cdot (\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0 \implies \lambda = \{0, 1, 2\}$$

- Si $\lambda \neq \{0, 1, 2\} \implies |A - \lambda I| \neq 0 \implies \text{ran}(A - \lambda I) = 3$
- Si $\lambda = 0 \implies A - 0 \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$
- Si $\lambda = 1 \implies A - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

  $|A - I| = 0 \implies \text{ran}(A - I) < 3$ y como $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A - I) = 2$
- Si $\lambda = 2 \implies A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  $|A - 2I| = 0 \implies \text{ran}(A - 2I) < 3$ y como $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A - 2I) = 2$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

> a) *(1.5 puntos) Discutir el sistema para los distintos valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$*
>
> $$\begin{cases} x+y+z=2a-1 \\ 2x+y+az=a \\ x+ay+z=1 \end{cases}$$
>
> b) *(0.5 puntos) Resolver el sistema en el caso $a=1$.*
>
> *(Extremadura - Matemáticas II - Julio 2023)*

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -a^2+3a-2=0 \implies a=\{1,2\}$$

- Si $a \neq \{1,2\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A)=3=\text{ran}(A^*)=\text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a=1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A|=0 \implies \text{ran}(A)<3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A)=2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*)=2$

  $\text{ran}(A)=2=\text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $=3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

- Si $a=2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A|=0 \implies \text{ran}(A)<3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A)=2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*)=3$

  $\text{ran}(A)=2 \neq \text{ran}(A^*)=3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

b) Resolvemos el sistema para $a = 1$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + 1 - \lambda + \lambda = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -y - \lambda = -1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 - \lambda \ , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Sean los vectores $\vec{u} = (0, 0, 2)$, $\vec{v} = (1, 1, 0)$ y $\vec{w} = (2, -1, 1)$.

a) (0.5 puntos) ¿Son $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ linealmente independientes?

b) (0.75 puntos) Calcular el área del triángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

c) (0.75 puntos) Calcular un vector de módulo uno perpendicular a los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

(Extremadura - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

a) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \implies \vec{u}, \ \vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes

b) $\text{Área}_\triangle = \dfrac{1}{2} \cdot |\vec{u} \times \vec{v}| = \dfrac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right| = \dfrac{1}{2} \cdot |(-2, 2, 0)| = \dfrac{1}{2}\sqrt{8} = \sqrt{2} \ u^2$

c) $\vec{t} \perp \vec{v}, \vec{w} \implies \vec{t} = k \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = k \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k \cdot (1, -1, -3)$

$$\left|\vec{t}\right| = 1 \implies \sqrt{11k^2} = 1 \implies k = \pm\frac{1}{\sqrt{11}} \implies \begin{cases} \vec{t}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{3}{\sqrt{11}}\right) \\ \vec{t}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}\right) \end{cases}$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Dados los puntos $A(0,0,2)$ *y* $B(1,1,0)$ *y la recta* $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$.

a) (1.25 puntos) Hallar el plano que contiene a r *y es paralelo al vector* $\overrightarrow{AB}$*.*

b) (0.75 puntos) Hallar la distancia del punto A *a la recta* r*.*

(Extremadura - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} R(1,0,0) \\ \vec{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0,1,1) \end{cases} \qquad \& \quad \overrightarrow{AB} = (1,1,-2)$$

a) $$\pi \equiv \begin{cases} R(1,0,0) \\ \vec{u} = \vec{d_r} = (0,1,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AB} = (1,1,-2) \end{cases} \implies \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\implies -3 \cdot (x-1) + y - z = 0 \implies \boxed{\pi \equiv 3x - y + z - 3 = 0}$$

b) $$d(A,r) = \frac{\left|\overrightarrow{AR} \times \vec{d_r}\right|}{\left|\vec{d_r}\right|} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{2}} = \frac{|(2,-1,1)|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}\ u$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Calcular los coeficientes a, b, c y d del polinomio $p(x) = a+bx+cx^2+dx^3$, *sabiendo que cumple todas las condiciones siguientes:*

- $p(x)$ *tiene un máximo relativo en* $x = -1$, *y*
- *la gráfica de* $p(x)$ *tiene un punto de inflexión en* $(0,0)$, *y*
- *la recta tangente a la gráfica de* $p(x)$ *en* $x = 2$ *tiene pendiente* 3.

(Extremadura - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

$$p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \quad \& \quad p'(x) = b + 2cx + 3dx^2 \quad \& \quad p''(x) = 2c + 6dx$$

- `Máximo en` $x = -1$: $p'(-1) = 0 \implies \odot\ b - 2c + 3d = 0$
- `P.I. en` $(0,0)$: $\begin{cases} p(0) = 0 \implies \boxed{a = 0} \\ p''(0) = 0 \implies 2c = 0 \implies \boxed{c = 0} \end{cases}$
- `R.T. con pdte. 3 en` $x = 2$: $p'(2) = 3 \implies \circledast\ b + 4c + 12d = 3$

$$\begin{cases} \odot\ b - 2c + 3d = 0 \xrightarrow[c=0]{a=0} b + 3d = 0 \\ \circledast\ b + 4c + 12d = 3 \xrightarrow[c=0]{a=0} b + 12d = 3 \end{cases} \implies 9d = 3 \implies \boxed{d = 1/3} \quad \& \quad \boxed{b = -1}$$

Por lo tanto $p(x) = -x + \dfrac{x^3}{3}$, y hacemos las siguientes comprobaciones:

$$\texttt{Máx. en } x = -1\text{: } p''(-1) = 2c - 6d = -2 < 0 \overset{(\cap)}{\implies} \text{Máximo en } x = -1$$

$$\texttt{P.I. en } (0,0)\text{: } p'''(x) = 6d = 2 \implies p'''(0) = 2 \neq 0 \implies \text{P.I. en } x = 0$$

Ejercicio 6 (2 *puntos*)

Encontrar los valores de a y b para que la función

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2+ax+b & ,\ si\ x\leq 1 \\ \ln x & ,\ si\ x>1 \end{cases}$$

sea continua en $x=1$ y su gráfica pase por el punto $(-1,5)$.

(Extremadura - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

- `Continuidad en` $x=1$:
  - $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\Big(2x^2+ax+b\Big)=a+b+2$
  - $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\ln x=0$
  - $f(1)=a+b+2$

  $f(x)$ es continua en $x=1 \iff \lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1) \Longrightarrow \odot\ a+b+2=0$

- Pasa por $(-1,5)$: $f(-1)=5 \Longrightarrow 2-a+b=5 \Longrightarrow \circledast\ a-b+3=0$

$$\begin{cases} \odot\ a+b+2=0 \\ \circledast\ a-b+3=0 \end{cases} \Longrightarrow 2a+5=0 \Longrightarrow \boxed{a=-5/2} \quad \& \quad \boxed{b=1/2}$$

———————— ∘ ————————

Ejercicio 7 (2 *puntos*)

Determinar la primitiva $F(x)$ de la función $f(x)=(x+1)\cdot e^{x+1}$ que cumple $F(0)=-1$.

(Extremadura - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

$$F(x)=\int f(x)\,dx=\int (x+1)\cdot e^{x+1}\,dx=\left\{\begin{array}{ll} u=x+1 & \Rightarrow du=dx \\ dv=e^{x+1}\,dx & \Rightarrow v=e^{x+1} \end{array}\right\}$$

$$=(x+1)\cdot e^{x+1}-\int e^{x+1}\,dx=(x+1)\cdot e^{x+1}-e^{x+1}+C=x\cdot e^{x+1}+C$$

$$F(0)=-1 \Longrightarrow C=-1 \Longrightarrow \boxed{F(x)=x\cdot e^{x+1}-1}$$

———————— ∘ ————————

Ejercicio 8 (2 *puntos*)

Calcular el área de la región encerrada por las gráficas de las funciones

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x \qquad \& \qquad g(x) = x$$

(Extremadura - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

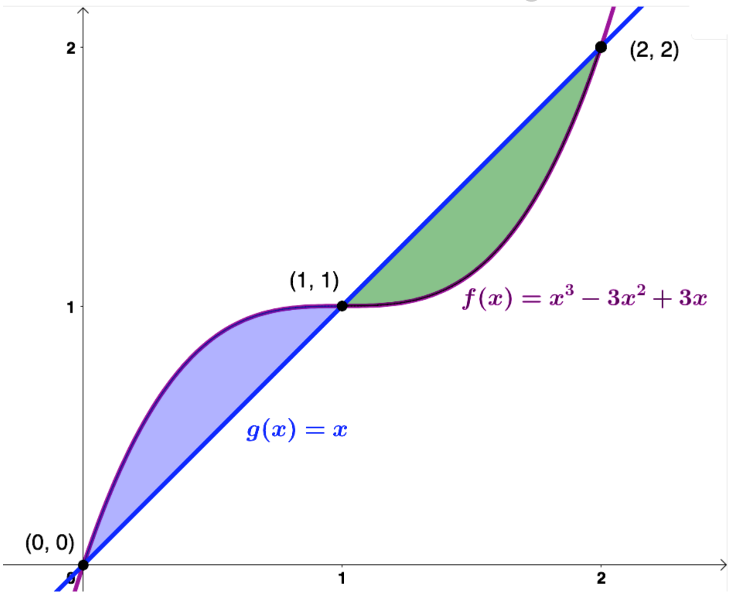
$h(x) = f(x) - g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - x = x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \implies x = \{0, 1, 2\}$

que definen dos recintos de integración $A_1 : (0, 1)$ y $A_2 : (1, 2)$

$$A_1 = \int_0^1 h(x)\,dx = \int_0^1 \left(x^3 - 3x^2 + 2x\right)dx = \left.\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^1 = \left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) - 0 = \frac{1}{4}$$

$$A_2 = \int_1^2 h(x)\,dx = \int_1^2 \left(x^3 - 3x^2 + 2x\right)dx = \left.\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_1^2 = (4 - 8 + 4) - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{Área} = |A_1| + |A_2| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\ u^2$$



Ejercicio 9 (2 *puntos*)

Un club de montaña organiza dos tipos de actividades para sus afiliados. El 70 % de ellos se apuntan a escalada, el 60 % a barranquismo y el 45 % de ellos practica las dos. Si se elige al azar un afiliado,

a) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que practique sólo una de las dos actividades.

b) (0.5 puntos) Calcular la probabilidad de que no practique ninguna.

c) (0.75 puntos) Sabiendo que hace barranquismo, calcular la probabilidad de que no haga escalada.

(Extremadura - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

Sean los sucesos:

$$E \equiv \text{“El afiliado practica escalada”}$$
$$B \equiv \text{“El afiliado practica barranquismo”}$$

Del enunciado tenemos:

$$P(E) = 0.7 \qquad \& \qquad P(B) = 0.6 \qquad \& \qquad P(E \cap B) = 0.45$$

a) $$\begin{aligned} P\Big((E \cap \overline{B}) \cup (\overline{E} \cap B)\Big) &= P(E \cap \overline{B}) + P(\overline{E} \cap B) \\ &= P(E) - P(E \cap B) + P(B) - P(E \cap B) \\ &= 0.7 - 0.45 + 0.6 - 0.45 = 0.4 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(\overline{E} \cap \overline{B}) = P(\overline{E \cup B}) &= 1 - P(E \cup B) = 1 - [P(E) + P(B) - P(E \cap B)] \\ &= 1 - (0.7 + 0.6 - 0.45) = 0.15 \end{aligned}$$

c) $$P(\overline{E} \mid B) = \frac{P(\overline{E} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(E \cap B)}{P(B)} = \frac{0.6 - 0.45}{0.6} = 0.25$$

Ejercicio 10 (2 *puntos*)

Los relojes de cierta marca tienen una vida útil que se ajusta a una distribución normal de media 10 años y desviación típica de 2 años. Si compramos un reloj de esta marca:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que dure entre 9 y 12 años.

b) (1 punto) ¿Cuánto tiempo tendrá que durar el reloj si queremos que el 90 % de los relojes de esa marca duren menos que el nuestro?

(Extremadura - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

$$X \equiv \text{“Vida útil de los relojes (años)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(10,2)$$

a) $$\begin{aligned} P(9 \leq X \leq 12) &= P\left(\frac{9-10}{2} \leq Z \leq \frac{12-10}{2}\right) = P(-0.5 \leq Z \leq 1) \\ &= P(Z \leq 1) - P(Z \leq -0.5) = P(Z \leq 1) - P(Z \geq 0.5) \\ &= P(Z \leq 1) - [1 - P(Z \leq 0.5)] = 0.8413 - (1 - 0.6915) = 0.5328 \end{aligned}$$

b) $$P(X \leq a) = 0.9 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a-10}{2}\right) = 0.9 \Rightarrow \frac{a-10}{2} = 1.28 \xRightarrow{Tabla} \boxed{a = 12.56 \text{ años}}$$