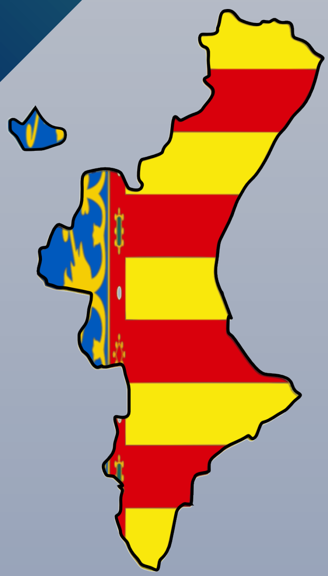
MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS



EVAU MODELO 2024

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Modelo 2024

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x - y + az = -2 \\ -x + 2y - az = 3 \\ ax + y + z = 2 \end{cases}$$

, donde a es un parámetro real. Obtener:

a) (5 puntos) El estudio del sistema en función del parámetro a.

b) (5 puntos) Las soluciones del sistema cuando éste sea compatible.

(Comunidad Valenciana - Matemáticas II - Modelo 2024)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & -2 \\ -1 & 2 & -a & 3 \\ a & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -a^2 + 1 = 0 \implies a = \{-1, 1\}$$

- Si $a \neq \{-1, 1\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{nº incóg.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) = 3$$

$$\operatorname{ran}(A) = 2 \neq \operatorname{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche} \text{Sistema Incompatible } (\nexists \text{ solución})$$

b) Resolvemos el sistema para $a = -1$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c} \\ F_2 + F_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x - 1 - \lambda = -2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{ll} x = -1 + \lambda & \\ y = 1 & , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda & \end{array}}$$

Para $a \neq -1, 1$ resolvemos el S.C.D. por el método de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 & a \\ 3 & 2 & -a \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-a-1}{-a^2+1} = \frac{1}{a-1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ -1 & 3 & -a \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-a+1}{-a^2+1} = \frac{1}{a+1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2}{-a^2+1}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Se dan las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtener (con los cálculos intermedios necesarios, así como con la mención explícita de los teoremas o propiedades utilizados):

a) *(7 puntos) Las matrices A^{-1} y $B = A^3 - 3A^2 + 5A$.*

b) *(3 puntos) Los valores α y β tales que $\alpha A^2 + \beta A + I = A^{-1}$.*

(Comunidad Valenciana - Matemáticas II - Modelo 2024)

Solución.

a) $|A| = 5 \quad \& \quad \operatorname{Adj} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{Adj} A^{\top} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = A^3 - 3A^2 + 5A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \boxed{B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 5I}$$

b) $\alpha A^2 + \beta A + I = A^{-1}$

$$\Longrightarrow \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -\alpha + \beta + 1 = \dfrac{1}{5} \\ 4\alpha + 2\beta = -\dfrac{2}{5} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \alpha = 1/5 \\ \beta = -3/5 \end{array}}$$ Vamos a comprobar estos valores:

$$\frac{1}{5}A^2 - \frac{3}{5}A + I = A^{-1} \Longrightarrow \left(\frac{1}{5}A^2 - \frac{3}{5}A + I\right) \cdot A = A^{-1} \cdot A \Longrightarrow \frac{1}{5}A^3 - \frac{3}{5}A^2 + A = I$$

$$\Longrightarrow A^3 - 3A^2 + 5A = 5I = B \quad \textit{c.q.d.}$$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Se dan las funciones polinómicas $f(x) = -x^2 + x + 2$ y $g(x) = x^2 - b$, siendo b un parámetro real. Obtener:

a) (5 puntos) El valor de b para que uno de los puntos de intersección de las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = x^2 - b$ sea el punto $P(-1, 0)$. Dibujad un esquema de las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = x^2 - 1$.

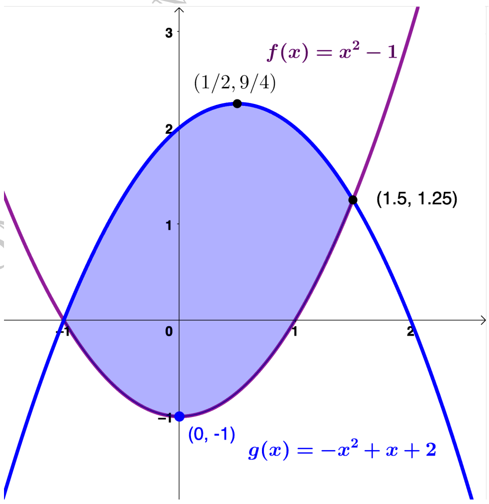
b) (5 puntos) El área de la superficie finita encerrada entre las curvas $y = x^2 - 1$ e $y = -x^2 + x + 2$.

(Comunidad Valenciana - Matemáticas II - Modelo 2024)

Solución.

a) $-x^2+x+2 = x^2-b \xrightarrow[P(-1,0)]{x=-1} -1-1+2 = 1-b$

$\Longrightarrow \boxed{b = 1}$



b)
- $f(x) = -x^2 + x + 2$ es una parábola cónvava ($\cap$), con vértice en $(1/2, 9/4)$, que corta al eje OX en $(-1, 0)$ y $(2, 0)$.
- $g(x) = x^2 - 1$ es una parábola convexa ($\cup$) con vértice en $((0, -1))$ y que corta al eje OX en $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.
- $f \cap g \Longrightarrow x^2 - 1 = -x^2 + x + 2$
  $\Longrightarrow x^2 - x - 3 = 0 \Longrightarrow x = \{-1, 3/2\}$

$$\text{Área} = \int_{-1}^{3/2} [g(x) - f(x)]\, dx = \int_{-1}^{3/2} \left[-x^2 + x + 2 - (x^2 - 1)\right] dx = \int_{-1}^{3/2} (-2x^2 + x + 3)\, dx$$

$$= -\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3x\Big]_{-1}^{3/2} = \left(-\frac{9}{4} + \frac{9}{8} + \frac{9}{2}\right) - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 3\right) = \frac{125}{24} \simeq 5.21\ u^2$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Una ventana Norman está formada por un rectángulo y un semicírculo. El diámetro horizontal del semicírculo está apoyado sobre el lado horizontal superior del rectángulo, que coincide con el diámetro horizontal del semicírculo.
La base del rectángulo mide x y su altura mide y, por lo que el diámetro del semicírculo mide x.
Obtener:

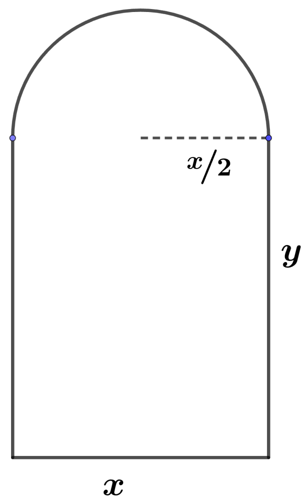
a) *(4 puntos) La expresión $S(x)$ que da el área de una ventana Norman de perímetro 5 metros en función de su anchura x.*

b) *(6 puntos) El valor de x para el que la función $S(x)$ tenga un máximo relativo y el valor de dicha área máxima.*

(Comunidad Valenciana - Matemáticas II - Modelo 2024)

Solución.

a) Sean x e y el ancho y alto de la ventana tal y como dicen en el enunciado del ejercicio.



$$\left.\begin{array}{l} S(x,y) = \underbrace{xy}_{S_{rectang}} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}_{S_{semicirc}} = xy + \frac{\pi x^2}{8} \\ P(x,y) = \underbrace{x+2y}_{P_{rectang.}} + \underbrace{\frac{\pi x}{2}}_{P_{Semic.}} = 5 \implies y = \frac{10 - x\cdot(2+\pi)}{4} \end{array}\right\}$$

$$\implies S(x) = x\cdot\frac{10 - x\cdot(2+\pi)}{4} + \frac{\pi x^2}{8} = \frac{20x - (4+\pi)\cdot x^2}{8}$$

b) $S'(x) = \dfrac{20 - 2\cdot(4+\pi)\cdot x}{8} = 0 \implies 20 - 2\cdot(4+\pi)\cdot x \implies x = \dfrac{10}{4+\pi}$

$$S''(x) = -\frac{4+\pi}{4} \implies S''\left(\frac{10}{4+\pi}\right) = -\frac{4+\pi}{4} < 0 \overset{(\cap)}{\implies} \text{Máximo en } x = \frac{10}{4+\pi}$$

Por tanto la ventana tendrá una superficie máxima para unas dimensiones:

$$x = \frac{10}{4+\pi} \quad \& \quad y = \frac{10 - \frac{10}{4+\pi}\cdot(2+\pi)}{4} = \frac{5}{4+\pi}$$

Y el área máxima será:

$$S = xy + \frac{\pi x^2}{8} = \frac{10}{4+\pi}\cdot\frac{5}{4+\pi} + \frac{\pi\cdot\left(\frac{5}{4+\pi}\right)^2}{8} = \frac{400+25\pi}{(4+\pi)^2} \simeq 9.38\ u^2$$

Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)

Dadas las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} y - z = 0 \\ 2x + 2 = 0 \end{cases} \qquad \& \qquad s \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{3} = z + 2$$

, obtener:

a) (5 puntos) La ecuación del plano π paralelo a ambas y que pase por el origen.

b) (5 puntos) La distancia de un punto de r y de un punto de s al plano π.

(Comunidad Valenciana - Matemáticas II - Modelo 2024)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} R(-1,0,0) \\ \vec{d}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,-2,-2) \approx (0,1,1) \end{cases} \qquad \& \qquad s \equiv \begin{cases} S(2,0,-2) \\ \vec{d}_s = (-1,3,1) \end{cases}$$

a) $$\pi \equiv \begin{cases} O(0,0,0) \\ \vec{u}_\pi = \vec{d}_r = (0,1,1) \\ \vec{v}_\pi = \vec{d}_s = (-1,3,1) \end{cases} \Longrightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \boxed{\pi \equiv 2x + y - z = 0}$$

b) $$d(R,\pi) = \frac{|-2|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \simeq 0.82\ u$$

$$d(S,\pi) = \frac{|4+2|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \simeq 2.45\ u$$

Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)

Dadas la recta r y el plano π: $r \equiv \dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z}{4}$ y $\pi \equiv ax + y - z = b$, con a y b parámetros reales, obtener:

a) (4 puntos) Los valores del parámetro a para los que r y π se cortan en un único punto y calcular las coordenadas de dicho punto en función del parámetro a.

b) (6 puntos) Los valores de a y b tales que la recta r esté contenida en el plano π y los valores de los parámetros para que la recta r no corte al plano π.

(Comunidad Valenciana - Matemáticas II - Modelo 2024)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} R(5,1,0) \\ \vec{d_r} = (1,3,4) \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 4\lambda \end{cases} \quad \& \quad \vec{n}_\pi = (a,1,-1)$$

a) $r \cap \pi \iff \vec{d_r} \not\perp \vec{n}_\pi \implies \vec{d_r} \cdot \vec{n}_\pi \neq 0 \implies a + 3 - 4 \neq 0 \implies \boxed{a \neq 1}$

$$P = r \cap \pi \implies a \cdot (5+\lambda) + 1 + 3\lambda - 4\lambda = b \implies \lambda = \tfrac{b-5a-1}{a-1}$$

$$\implies \boxed{P\left(\frac{b-6}{a-1}, \frac{-14a+3b-4}{a-1}, \frac{4b-20a-4}{a-1}\right)}$$

b) $$r \in \pi \implies \begin{cases} \vec{d_r} \perp \vec{n}_\pi \implies \boxed{a = 1} \\ R \in \pi \implies 5 + 1 - 0 = b \implies \boxed{b = 6} \end{cases}$$

Ejercicio 7 (2.5 *puntos*)

Una máquina funciona en nodo automático el 70 % de los días y de modo manual el resto de los días. La probabilidad de que tenga un fallo cuando funciona en modo automático es 0.15. La probabilidad de eque tenga un fallo cuando funciona en modo manual es 0.05. Obtenga:

a) *(5 puntos) La probabilidad de que no tenga ningún fallo.*

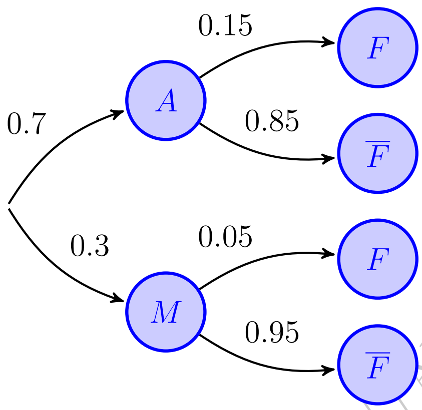
b) *(5 puntos) Si un día tiene un fallo, ¿cuál es la probabilidad de que haya funcionado en modo manual?*

(Comunidad Valenciana - Matemáticas II - Modelo 2024)

Solución.

Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{“La máquina funciona en modo automático”}$$
$$M \equiv \text{“La máquina funciona en modo manual”}$$
$$F \equiv \text{“La máquina falla”}$$



a) $$P(\overline{F}) = P\big((A \cap \overline{F}) \cup (M \cap \overline{F})\big)$$
$$= P(A \cap \overline{F}) + P(M \cap \overline{F})$$
$$= P(A) \cdot P(\overline{F} \mid A) + P(M) \cdot P(\overline{F} \mid M)$$
$$= 0.7 \cdot 0.85 + 0.3 \cdot 0.95 = 0.88$$
$$P(F) = 1 - P(\overline{F}) = 1 - 0.88 = 0.12$$

b) $$P(M \mid F) = \frac{P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{P(M) \cdot P(F \mid M)}{P(F)}$$
$$= \frac{0.3 \cdot 0.05}{0.12} = 0.125$$

Ejercicio 8 (2.5 *puntos*)

Un usuario de internet sabe que en el 60 % de las compras que realiza no tiene ningún probalema. Si en un día realiza 8 compras, calcular

a) (4 puntos) La probabilidad de que, como máximo en 6, no tenga ningún problema.

b) (3 puntos) La probabilidad de que no tenga problemas al menos en 4 compras.

c) (3 puntos) La probabilidad de que no tenga problemas en más de 3 y como máximo en 7 compras.

(Comunidad Valenciana - Matemáticas II - Modelo 2024)

Solución.

$$X \equiv \text{“El usuario no tiene problemas con la compra en internet”} \longrightarrow X : \mathcal{B}(8, 0.6)$$

a) $P(X \leq 6) = 1 - P(X > 6) = 1 - [P(X = 7) + P(X = 8)] = 1 - \left[\binom{8}{7} \cdot 0.6^7 \cdot 0.4 + \binom{8}{8} \cdot 0.6^8\right] = 1 - 0.1064 = 0.8936$

b) $P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)]$
$= 1 - \left[\binom{8}{0} \cdot 0.4^8 + \binom{8}{1} \cdot 0.6 \cdot 0.4^7 + \binom{8}{2} \cdot 0.6^2 \cdot 0.4^6 + \binom{8}{3} \cdot 0.6^3 \cdot 0.4^5\right]$
$= 1 - 0.1737 = 0.8263$

c) $P(3 < X \leq 7) == P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7)$
$= \binom{8}{4} \cdot 0.6^4 \cdot 0.4^4 + \binom{8}{5} \cdot 0.6^5 \cdot 0.4^3 + \binom{8}{6} \cdot 0.6^6 \cdot 0.4^2 + \binom{8}{7} \cdot 0.6^7 \cdot 0.4^1$
$= 0.8095$