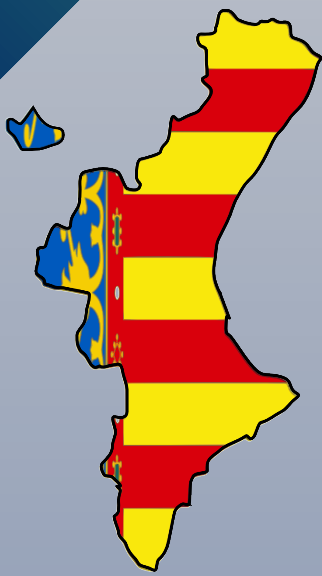
MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS



EVAU MODELO 2024

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Modelo 2024

Ejercicio 1 (3.33 *puntos*)

Consideremos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) *(2 puntos) Hallar la inversa de la matriz A.*

b) *(2 puntos) Hallar la matriz X que satisface la ecuación $AX = B$.*

c) *(3 puntos) Hallar la matriz Y que satisface la ecuación $Y^\top \cdot A = B$, donde $Y^\top$ representa la matriz traspuesta de Y.*

d) *(3 puntos) Hallar la matriz Z que satisface la ecuación $AZA = B$.*

(Comunidad Valenciana - Matemáticas CCSS - Modelo 2024)

Solución.

a) $|A| = 1 \Rightarrow \text{Adj}\, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}\, A^\top = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $AX = B \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot B \implies \boxed{X = A^{-1} \cdot B}$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}$$

c) $Y^\top \cdot A = B \implies Y^\top \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} = B \cdot A^{-1} \implies Y^\top = B \cdot A^{-1} \implies \boxed{Y = \left(B \cdot A^{-1}\right)^\top}$

$$Y = (B \cdot A^{-1})^\top = \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right]^\top = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^\top$$

$$\implies \boxed{Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

d) $AZA = B \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot Z \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} = \underbrace{A^{-1} \cdot B}_{X} \cdot A^{-1} \implies \boxed{Z = X \cdot A^{-1}}$

$$Z = X \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \implies \boxed{Z = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2 (3.33 *puntos*)

Una empresa de alquiler de coches dispone de tres modelos de coche para alquilar. El más barato se alquila por 15 euros al día; el modelo intermedio, por 25; y el más caro, por 40. La flota consta de un total de 100 coches. Sabemos que si un día la empresa alquila todos sus coches sus ingresos serán de 2225 euros. Sabemos también que un día que la empresa alquiló la mitad de los coches más baratos, la quinta parte de los intermedios y solo uno de los más caros sus ingresos fueron de 590 euros. ¿Cuántos coches de cada modelo tiene la empresa?

(Comunidad Valenciana - Matemáticas CCSS - Modelo 2024)

Solución.

Sean los sucesos:

$$x \equiv \text{“N}^{\text{o}}\text{ de coches baratos de la flota”}$$
$$y \equiv \text{“N}^{\text{o}}\text{ de coches intermedios de la flota”}$$
$$z \equiv \text{“N}^{\text{o}}\text{ de coches caros de la flota”}$$

Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 15x+25y+40z=2225 \\ \dfrac{15x}{2}+\dfrac{25y}{5}+40=590 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=100 \\ 3x+5y+8z=445 \\ 3x+2y=220 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 3 & 5 & 8 & 445 \\ 3 & 2 & 0 & 220 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2-3F_1 \\ F_3-3F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 2 & 5 & 145 \\ 0 & -1 & -3 & -80 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 2F_3+F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 2 & 5 & 145 \\ 0 & 0 & -1 & -15 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x+35+15=100 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2y+5\cdot 15=145 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -z=-15 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=50 \\ y=35 \\ z=15 \end{array}}$$

Ejercicio 3 (3.33 *puntos*)

> *Se considera la función* $f(x) = \dfrac{4x^2+11x-20}{(x-2)^2}$. *Se pide:*
>
> a) *(2 puntos) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.*
>
> b) *(2 puntos) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.*
>
> c) *(2 puntos) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.*
>
> d) *(2 puntos) Los máximos y mínimo locales, si existen.*
>
> e) *(2 puntos) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores.*
>
> *(Comunidad Valenciana - Matemáticas CCSS - Modelo 2024)*

Solución.

a)
- `Dominio:` $(x-2)^2 = 0 \implies x = 2 \implies \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$
- `Cortes con los ejes:`
  - Eje X: $y = 0 \Rightarrow 4x^2+11x-20 = 0 \Rightarrow x = \{-4, {}^5\!/\!_4\} \implies (-4,0)$ y $({}^5\!/\!_4, 0)$
  - Eje Y: $x = 0 \implies y = -5 \implies (0,-5)$

b)
- `A. Vertical:` $\exists$ *A.V.* en $x = 2$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{4x^2+11x-20}{(x-2)^2} = \left[\frac{18}{0}\right] = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{18}{0^+} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{18}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

- `A. Horizontal:` $\exists \underset{x\to\pm\infty}{A.H.}$ en $y = 4$

$$y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^2+11x-20}{(x-2)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{4}{1} = 4$$

c) `Monotonía:`

$$f'(x) = \frac{(8x+11)\cdot(x-2)^{\cancel{2}} - (4x^2+11x-20)\cdot 2\cdot \cancel{(x-2)}}{(x-2)^{\cancel{4}3}} = \frac{18-27x}{(x-2)^3} = 0$$

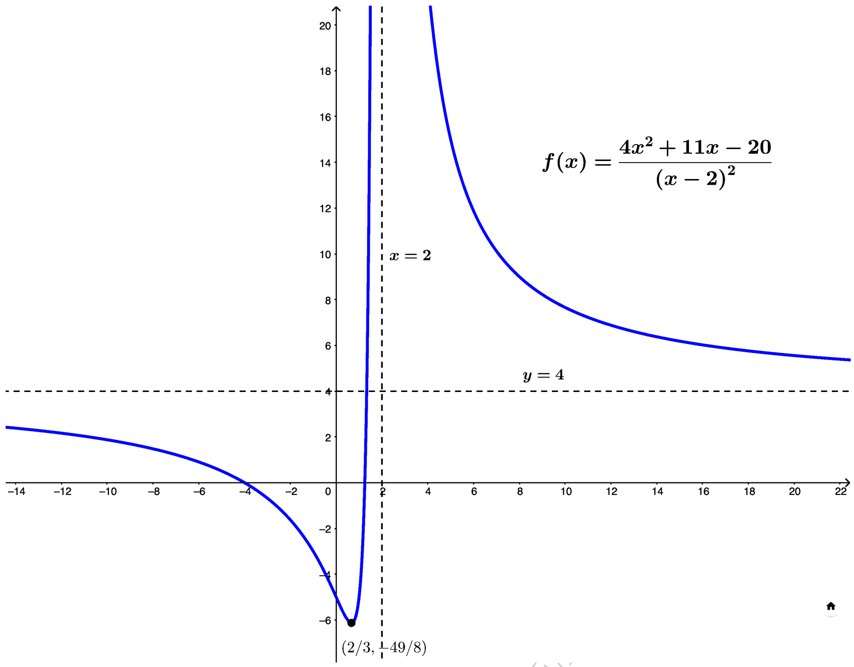
$$\implies 18 - 27x = 0 \implies x = {}^2\!/\!_3$$

	$(-\infty, {}^2\!/\!_3)$	$({}^2\!/\!_3, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo $f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	Decreciente ↘	Creciente ↗	Decreciente ↘

La función $f(x)$ es *creciente* en $({}^2\!/\!_3, 2)$ y *decreciente* en $(-\infty, {}^2\!/\!_3) \cup (2, +\infty)$.

d) La función $f(x)$ tiene un *mínimo relativo* en $({}^2\!/\!_3, -{}^{49}\!/\!_8)$.

e) Representación de la función:



Ejercicio 4 (3.33 *puntos*)

Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & , \textit{si } 0 \leq x \leq 3 \\ -x^2 + 10x - 15 & , \textit{si } 3 < x \leq 6 \\ x + 4 & , \textit{si } 6 < x \leq 10 \end{cases}$$

Se pide:

a) *(3 puntos) Estudiar la continuidad de la función $f(x)$ en el intervalo $[0, 10]$.*

b) *(3 puntos) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ en el intervalo $[0, 10]$.*

c) *(4 puntos) Calcular el área de la región delimitada por la función $f(x)$, la recta de ecuación $x = 4$, la recta de ecuación $x = 6$ y el eje OX.*

(Comunidad Valenciana - Matemáticas CCSS - Modelo 2024)

Solución.

a)
- Si $x \neq \{3, 6\}$, $f(x)$ es continua porque son polinomios
- Si $x = 3$
  - $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 2x + 3) = 6$
  - $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (-x^2 + 10x - 15) = 6$
  - $f(3) = 3^2 - 6 + 3 = 6$

  $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = f(3) \implies f(x)$ es continua en $x = 3$.
- Si $x = 6$

- $\lim_{x \to 6^-} f(x) = \lim_{x \to 6} (-x^2 + 10x - 15) = 9$
- $\lim_{x \to 6^+} f(x) = \lim_{x \to 6} (x + 4) = 10$

$\lim_{x \to 6^-} f(x) \neq \lim_{x \to 6^+} f(x) \Rightarrow f(x)$ tiene discontinuidad de salto finito en $x = 6$.

Por lo tanto la función $f(x)$ es continua en $[0, 6) \cup (6, 10]$.

b) `Monotonía de` $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2 = 0 \implies x = 1 & , \text{si } 0 < x < 3 \\ -2x + 10 = 0 \implies x = 5 & , \text{si } 3 < x < 5 \\ 1 > 0 & , \text{si } 6 < x < 10 \end{cases}$$

	$(0, 1)$	$(1, 3)$	$(3, 5)$	$(5, 6)$	$(6, 10)$
Signo $f'(x)$	-	$+$	$+$	-	$+$
$f(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(1, 5) \cup (6, 10)$ y *decreciente* en $(0, 1) \cup (5, 6)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(1, 2)$ y un *máximo relativo* en $(5, 10)$.

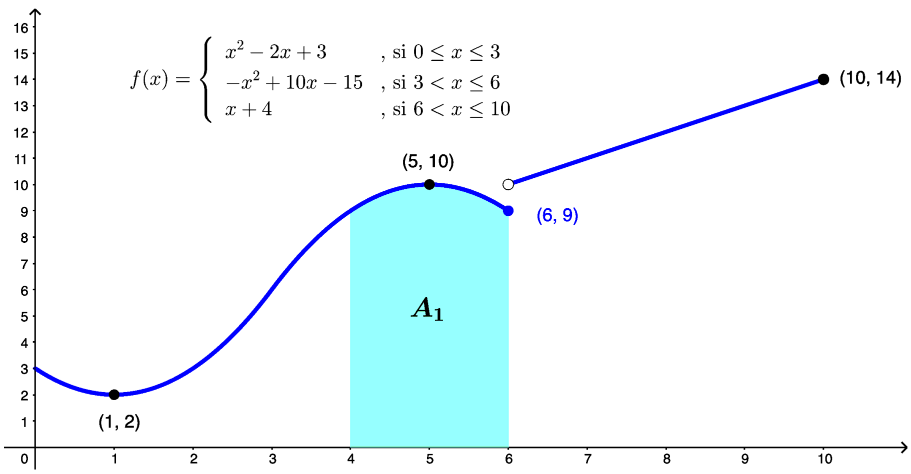
c) Hallamos los puntos de corte de $f(x)$ con el eje OX.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 = 0 \implies \nexists \text{ Sol.} & , \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ -x^2 + 10x - 15 = 0 \implies \begin{cases} \cancel{x = 1.837} \notin (3, 6] \\ \cancel{x = 8.162} \notin (3, 6] \end{cases} & , \text{si } 3 < x \leq 6 \\ x + 4 = 0 \implies \cancel{x = -4} \notin (6, 10] & , \text{si } 6 < x \leq 10 \end{cases}$$

Estos puntos de corte con el eje OX, junto con las rectas verticales $x = 4$ y $x = 6$ definen un único recinto de integración $A_1 : (4, 6)$

$$A_1 = \int_4^6 f(x)\, dx = \int_4^6 (-x^2 + 10x - 15)\, dx = \left. -\frac{x^3}{3} + 5x^2 - 15x \right]_4^6$$
$$= (-72 + 180 - 90) - \left(-\frac{64}{3} + 80 - 60\right) = \frac{58}{3}$$

$$\text{Área} = |A_1| = \frac{58}{3} \simeq 19.33\ u^2$$



Ejercicio 5 (3.33 *puntos*)

Una urna contiene tres bolas rojas y dos negras, que se van extrayendo de una en una sin reposición. Calcula:

a) (3 puntos) La probabilidad de que las dos primeras bolas extraídas sean del mismo color.

b) (4 puntos) La probabilidad de que las dos primeras bolas extraídas sean negras, sabiendo que la tercera es roja.

c) (3 puntos) La probabilidad de que al extraer las cinco bolas cada una sea de color distinto a la extraída anteriormente.

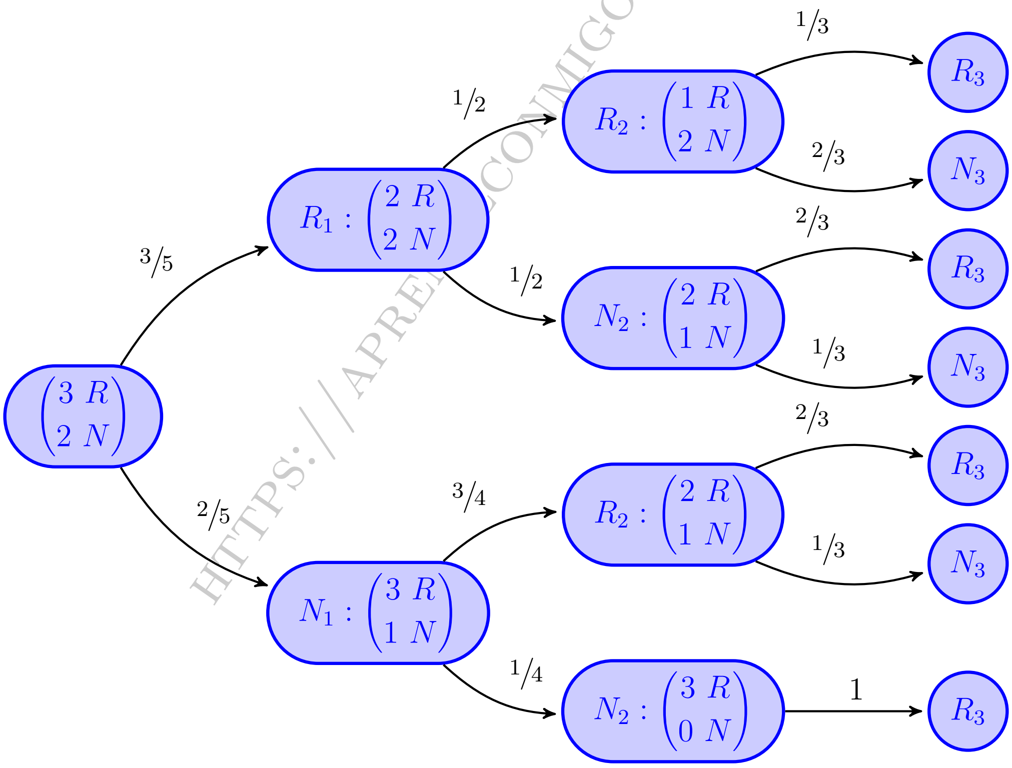
(Comunidad Valenciana - Matemáticas CCSS - Modelo 2024)

Solución.

Sean los sucesos:

$R_i \equiv$ "La bola i extraída es roja" $\qquad$ $N_i \equiv$ "La bola i extraída es negra"

$M \equiv$ "Las dos primeras bolas son del mismo color"



a) $P(M) = P\Big((R_1 \cap R_2) \cup (N_1 \cap N_2)\Big) = P(R_1 \cap R_2) + P(N_1 \cap N_2)$

$$= P(R_1) \cdot P(R_2 \mid R_1) + P(N_1) \cdot P(N_2 \mid N_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{5}$$

b) $P(R_3) = P\Big((R_1 \cap R_2 \cap R_3) \cup (R_1 \cap N_2 \cap R_3) \cup (N_1 \cap R_2 \cap R_3) \cup (N_1 \cap N_2 \cap R_3)\Big)$

$$P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) + P(R_1 \cap N_2 \cap R_3) + P(N_1 \cap R_2 \cap R_3) + P(N_1 \cap N_2 \cap R_3)$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{3}{5}$$

$$P\big((N_1 \cap N_2) \mid R_3\big) = \frac{P(N_1 \cap N_2 \cap R_3)}{P(R_3)} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{6}$$

c) Para que las cinco bolas extraídas alternen su color necesariamente han de comenzar con bola roja.

$$P(R_1 \cap N_2 \cap R_3 \cap N_4 \cap R_5) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{10}$$

Ejercicio 6 (3.33 *puntos*)

La colicacilosis es una enfermedad que afecta a los loros. En un centro veterianario, se estima en un 40 % la proporción de loros portadores de la enfermedad. Se realiza un test diagnóstico de la enfermedad entre los loros del centro veterinario. Cuando un loro es portador de la enfermedad el test da positivo en el 90 % de los casos. Si el loro no es portador de la enfermedad, el test da negativo en el 85 % de los casos. Se escoge un loro al azar del centro veterinario. Calcula:

a) (3 puntos) la probabilidad de que el loro sea portador de la enfermedad y su test dé positivo.

b) (3 puntos) la probabilidad de que el test dé positivo.

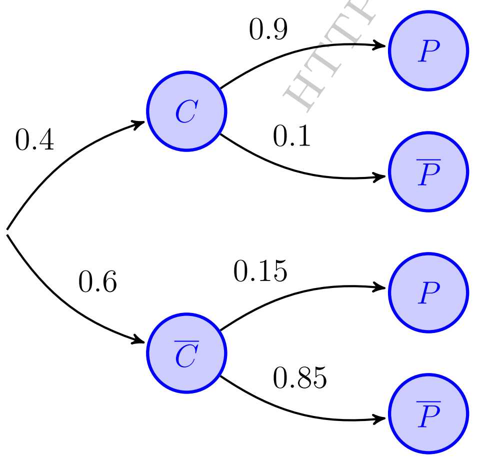
c) (4 puntos) la probabilidad de que el loro sea portador de la enfermedad, si sabemos que ha dado negatvo en el test.

(Comunidad Valenciana - Matemáticas CCSS - Modelo 2024)

Solución.

Sean los sucesos:

$$C \equiv \text{“El loro es portador de colicacilosis”}$$
$$P \equiv \text{“El test da positivo en la enfermedad”}$$



a) $P(C \cap P) = P(C) \cdot P(P \mid C) = 0.4 \cdot 0.9 = 0.36$

b)
$$\begin{aligned} P(P) &= P\big((C \cap P) \cup (\overline{C} \cap P)\big) \\ &= P(C \cap P) + P(\overline{C} \cap P) \\ &= P(C) \cdot P(P \mid C) + P(\overline{C}) \cdot P(P \mid \overline{C}) \\ &= 0.4 \cdot 0.9 + 0.6 \cdot 0.15 = 0.45 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} P(C \mid \overline{P}) &= \frac{P(C \cap \overline{P})}{P(\overline{P})} = \frac{P(C) \cdot P(\overline{P} \mid C)}{1 - P(P)} \\ &= \frac{0.6 \cdot 0.15}{1 - 0.45} = 0.1636 \end{aligned}$$