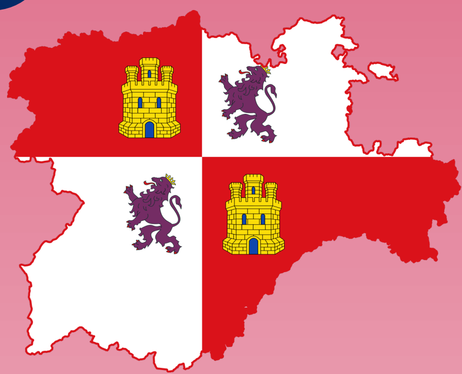
MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS



EVAU MODELO 2022

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Modelo 2022

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

a) *(1.2 puntos) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro λ:*

$$\begin{cases} \lambda x + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

b) *(0.8 puntos) Resolverlo para $\lambda = 1$.*

(Castilla y León - Matemáticas II - Modelo 2022 - Bloque Algebra)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \implies \lambda = \{-2, 1\}$$

- Si $\lambda \neq \{-2,1\}$ $|A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $\lambda = -2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

- Si $\lambda = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $\lambda = 1$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x + t = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 - t + y + t = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = t & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{ll} x = 1 - t & \\ y = 0 & , t \in \mathbb{R} \\ z = t & \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ & $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ & $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$, *calcúlense a y b para que se verifiquen $|MA| = 2$ y $|M + B| = 3$, donse se está usando la notación habitual (con barras verticales) para denotar al determinante de una matriz.*

(Castilla y León - Matemáticas II - Modelo 2022 - Bloque Algebra)

Solución.

$$|M \cdot A| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ a + 2b & 2a + 5b \end{vmatrix} = -a + b = 2 \Longrightarrow -a + b = 2$$

$$|M + B| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ a + 1 & b + 1 \end{vmatrix} = -a + 2b + 1 = 3 \Rightarrow -a + 2b = 2$$

$$\begin{array}{ccr} -a + b = 2 & \xrightarrow{\times(-1)} & \cancel{a} - b = -2 \\ -a + 2b = 2 & \longrightarrow & \cancel{-a} + 2b = 2 \\ \hline & & b = 0 \end{array} \Longrightarrow \boxed{b = 0}$$

$$-a + b = 2 \Longrightarrow -a + 0 = 2 \Longrightarrow \boxed{a = -2}$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Dada la recta $r \equiv x+2=y=z-2$ y el plano $\pi \equiv x-z+2=0$, se pide:

a) (0.8 puntos) Determinar la posición relativa de r y π.

b) (1.2 puntos) Calcular el punto simétrico del punto $P(-2,0,2)$ de la recta r respecto de π y hallar la recta simátrica de r respecto del plano π.

(Castilla y León - Matemáticas II - Modelo 2022 - Bloque Geometría)

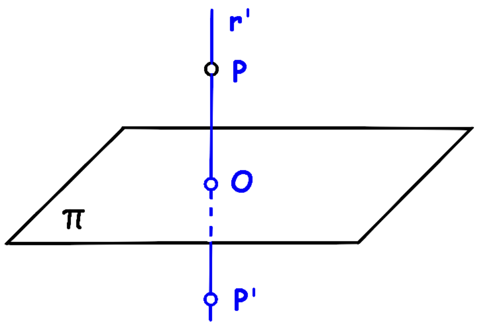
Solución.

$$r \equiv \begin{cases} P(-2,0,2) \\ \vec{d_r}=(1,1,1) \end{cases} \equiv \begin{cases} x=-2+\lambda \\ y=\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases} \qquad \& \qquad \vec{n}_\pi=(1,0,-1)$$

a) $\vec{d_r}\cdot\vec{n}_\pi=(1,1,1)\cdot(1,0,-1)=1-1=0 \implies r \parallel \pi$ o $r\equiv\pi$
¿$P\in\pi$? $\implies -2-2+2\neq 0 \implies P\notin\pi \implies r\parallel\pi$, luego r y π son paralelos.

b) Hallamos $r'\perp\pi$ que pasa por $P(-2,0,2)$

$$r' \equiv \begin{cases} P(-2,0,2) \\ \vec{d_{r'}}=\vec{n}_\pi=(1,0,-1) \end{cases} \equiv \begin{cases} x=-2+\lambda \\ y=0 \\ z=2-\lambda \end{cases}$$



$$O=r'\cap\pi \implies -2+\lambda-(2-\lambda)+2=0$$

$$\xRightarrow{\lambda=1} O(-2+\lambda,0,2-\lambda)=(-1,0,1)$$

$$O=M_{\overline{PP'}}=\frac{P+P'}{2} \implies P'=2O-P$$

$$\Rightarrow P'=2\cdot(-1,0,1)-(-2,0,2)\Rightarrow \boxed{P'(0,0,0)}$$

La recta s, simétrica de r respecto π, será una recta paralela a r que pasa por P'

$$s \equiv \begin{cases} P'(0,0,0) \\ \vec{d_s}=\vec{d_r}=(1,1,1) \end{cases} \implies \boxed{s \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases} ,\ \lambda\in\mathbb{R}}$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Dada la recta $r \equiv x-1=\dfrac{y+1}{2}=z-1$ *y el plano* $\pi \equiv x-y+z=0$, *se pide:*

a) (0.8 puntos) Determinar la posición relativa de r *y* π.

b) (1.2 puntos) Calcular la distancia del plano π *al punto* $(1,-1,1)$ *de la recta* r *y hallar el plano paralelo a* π *situado a la misma distancia de* r *que* π.

(Castilla y León - Matemáticas II - Modelo 2022 - Bloque Geometría)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} R(1,-1,1) \\ \vec{d}_r=(1,2,1) \end{cases} \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases} \qquad \& \qquad \vec{n}_\pi=(1,-1,1)$$

a) $\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi=(1,2,1)\cdot(1,-1,1)=1-2+1=0 \implies r \parallel \pi$ o $r \equiv \pi$
¿$R \in \pi$? $\implies 1-(-1)+1 \neq 0 \implies R \notin \pi \implies r \parallel \pi$, luego r y π son paralelos.

b) $d(R,\pi)=\dfrac{|1-(-1)+1|}{\sqrt{1+1+1}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\ u$

Un plano $\pi' \parallel \pi$ es de la forma $\pi' \equiv x-y+z+D=0$, luego solo queda obligar a que la distancia a r sea $\sqrt{3}$, esto es, que la distancia de un punto $R \in r$ al plano π' valga $\sqrt{3}$.

$$d(R,\pi')=\frac{|1-(-1)+1+D|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{|3+D|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3} \implies |3+D|=3$$

$$|3+D|=3 \implies \begin{cases} 3+D=3 \implies D=0 \implies \cancel{\pi' \equiv \pi} \\ 3+D=-3 \xRightarrow{D=-6} \boxed{\pi' \equiv x-y+z-6=0} \end{cases}$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

> *Dada la función $f(x) = 3x^4 + x^3 - 1$, determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos y el número total de puntos en los que $f(x)$ se anula. (Téngase en cuenta la monotonía de la función y los valores que toma en los extremos relativos previamente calculados).*
>
> *(Castilla y León - Matemáticas II - Modelo 2022 - Bloque Análisis)*

Solución.

$f'(x) = 12x^3 + 3x^2 = 3x^2 \cdot (4x+1) = 0 \implies \{0, -1/4\}$

	$(-\infty, -1/4)$	$(-1/4, 0)$	$(0, +\infty)$
Signo $f'(x)$	-	$+$	$+$
$f(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$	Creciente $\nearrow$

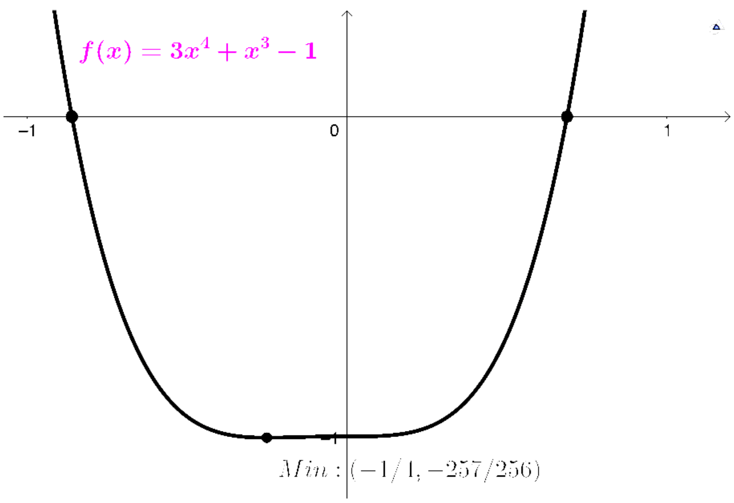
La función $f(x)$ es *creciente* en $(-1/4, +\infty)$ y *decreciente* en $(-\infty, -1/4)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(-1/4, 257/256)$ y un *punto de inflexión* en $(0, -1)$.

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ es continua en } (-1, -1/4) \\ f(-1) = 1 > 0 \\ f(-1/4) = -257/256 < 0 \end{array}\right\} \xRightarrow{\textit{Th. Bolzano}} \exists a \in (-1, -1/4) \mid f(a) = 0$$

Por lo tanto sabemos que existe un punto de corte con el eje OX en el intervalo $(-1, -1/4)$, además ese punto es único debido a que en el intervalo $(-\infty, -1/4)$ la función es siempre decreciente.

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ es continua en } (-1/4, 1) \\ f(-1/4) = -257/256 < 0 \\ f(1) = 3 > 0 \end{array}\right\} \xRightarrow{\textit{Th. Bolzano}} \exists b \in (-1/4, 1) \mid f(b) = 0$$

Por lo tanto sabemos que existe un punto de corte con el eje OX en el intervalo $(-1/4, 1)$, además ese punto es único debido a que en el intervalo $(-1/4, +\infty)$ la función es siempre creciente.
Por todo esto podemos deducir que el número de puntos de corte de la función con el eje OX es 2.



Ejercicio 6 (2 *puntos*)

Dada la función $f(x) = x \cdot e^{-x}$, determínese su dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión. Esbócese también su gráfica.

(Castilla y León - Matemáticas II - Modelo 2022 - Bloque Análisis)

Solución.

- `Dominio:` $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- `A. Vertical:` Como $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \implies \nexists\, A.V.$
- `A. Horizontal:`

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\cdot e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} -x\cdot e^{x} = -\infty \implies \nexists \underset{x\to-\infty}{A.H.}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{L'H\hat{o}p}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \implies \underset{x\to+\infty}{A.H.} \text{ en } y = 0$$

- `A. Oblicua:` $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}\cdot e^{-x}}{\cancel{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \implies \nexists \underset{x\to-\infty}{A.O.}$$

- `Monotonía:`

$f'(x) = (1-x)\cdot e^{-x} = 0 \implies x = 1$

	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

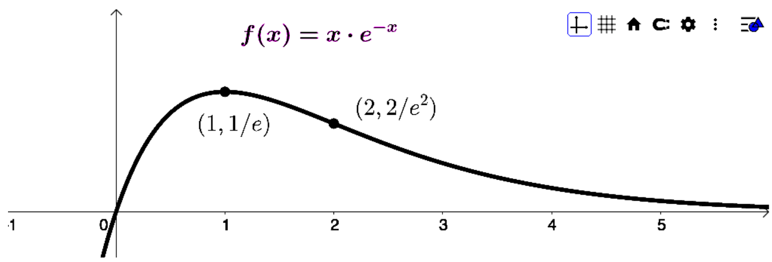
La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, 1)$ y *decreciente* en $(1, +\infty)$ y tiene un *máximo relativo* en $(1, 1/e)$.

- `Curvatura:`

$f''(x) = (x-2)\cdot e^{-x} = 0 \implies x = 2$

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo $f''(x)$	-	+
$f(x)$	Cóncava $\cap$	Convexa $\cup$

La función $f(x)$ es *cóncava* en $(-\infty, 2)$ y *convexa* en $(2, +\infty)$ y tiene un *punto de inflexión* en $(2, 2/e^2)$



Ejercicio 7 (2 *puntos*)

Dada la función $f(x) = x \cdot \cos x$, se pide:

a) *(0.8 puntos) Demostrar que $f(x)$ es no negativa en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.*

b) *(1.2 puntos) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$ y el eje de las x, cuando x pertenece al intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.*

(Castilla y León - Matemáticas II - Modelo 2022 - Bloque Análisis)

Solución.

a) Podríamos hacer el estudio del signo de $f(x)$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, pero basta ver que en dicho intervalo tanto la función x, como $\cos x$, son no negativas y por tanto $x \cdot \cos x \geq 0 \; \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) $f(x) = x \cdot \cos x = 0 \xrightarrow{x\in[0,\pi/2]} x = \{0, \pi/2\}$, lo que define un único recinto de integración $A_1 : (0, \pi/2)$

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int x \cdot \cos x\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos x\,dx & \Rightarrow v = \operatorname{sen} x \end{array} \right\}$$

$$= x \cdot \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx = x \cdot \operatorname{sen} x + \cos x + C$$

$$A_1 = \int_0^{-\pi/2} f(x)\,dx = F(\pi/2) - F(0) = \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cancelto{0}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$- \left[0 + \cancelto{1}{\cos 0}\right] = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$Area = |A_1| = \frac{\pi}{2} - 1 \simeq 0.57\ u^2$$

Ejercicio 8 (2 *puntos*)

a) *(1 punto) Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \cos x}{\ln(1+x)}$.*

b) *(1 punto) Calcular $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$.*

(Castilla y León - Matemáticas II - Modelo 2022 - Bloque Análisis)

Solución.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \cos x}{\ln(1+x)} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{L'H\hat{o}p}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + \operatorname{sen} x}{\frac{1}{1+x}} = \dfrac{1+0}{1} = 1$

b) $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx = \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'} \cdot \underbrace{(\ln x)^2}_{u^2}\,dx = \frac{(\ln x)^3}{3} + C$

Ejercicio 9 (2 *puntos*)

Una corporación informática utiliza 3 bufetes de abogados para resolver sus casos legales en los tribunales. El bufete A recibe el 30 % de los casos legales y gana en los tribunales el 60 % de los casos presentados, el bufete B recibe el 50 % de los casos legales y gana el 80 % de los casos presentados mientras que el bufete C recibe el 20 % de los casos legales y gana el 70 % de los casos presentados.

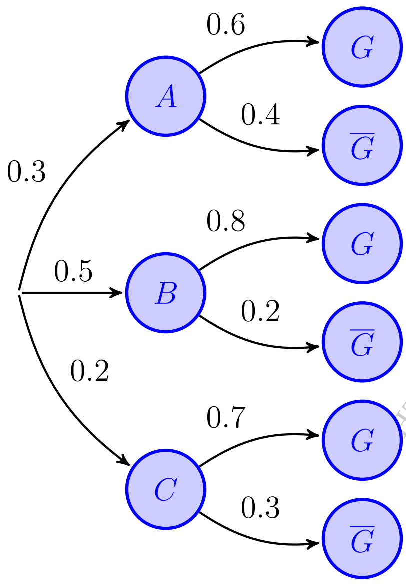
a) *Se consideran los sucesos A = "caso adjudicado al bufete A", B = "caso adjudicado al bufete B", C = "caso adjudicado al bufete C", G="caso ganado". Deduzca del enunciado los valores de $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$, $p(G \mid A)$, $p(G \mid B)$, $p(G \mid C)$.*

b) *(0.5 puntos) Se elige al azar uno de los casos presentados en los tribunales. Determine la probabilidad de que la empresa gane el caso.*

c) *(1 punto) Si se ha ganado el caso elegido, calcúlese la probabilidad de que haya sido encargado al bufete A.*

(Castilla y León - Matemáticas II - Modelo 2022 - Bloque Probabilidad)

Solución.



a) $p(A) = 0.3 \qquad p(B) = 0.5 \qquad p(C) = 0.2$

$p(G \mid A) = 0.6 \qquad p(G \mid B) = 0.8 \qquad p(G \mid C) = 0.7$

b)
$$
\begin{aligned}
P(G) &= P\big((A\cap G) \cup (B \cap G) \cup (C \cap G)\big) \\
&= P(A\cap G) + P(B\cap G) + P(C \cap G) \\
&= P(A)\cdot P(G \mid A) + P(B)\cdot P(G \mid B) \\
&+ P(C)\cdot P(G \mid C) = 0.3\cdot 0.6 + 0.5 \cdot 0.8 \\
&+ 0.2 \cdot 0.7 = 0.72
\end{aligned}
$$

c)
$$
\begin{aligned}
P(A \mid G) &= \frac{P(A\cap G)}{P(G)} = \frac{P(A)\cdot P(G \mid A)}{P(G)} \\
&= \frac{0.3\cdot 0.6}{0.72} = 0.25
\end{aligned}
$$

Ejercicio 10 (2 *puntos*)

> *La variable aleatoria IMC (índice de masa corporal de modo abreviado) de las personas adultas de un determinado país sigue una distribución normal de media* 26 *y desviación típica de* 6. *Si tener un IMC determinado superior a* 35 *significa ser obeso, encontrar la proporción de personas adultas obesas de ese país.*
>
> *(Castilla y León - Matemáticas II - Modelo 2022 - Bloque Estadística)*

Solución.

$$X \equiv \text{“Indice de Masa Corporarl”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(26, 6)$$

$$P(X > 35) = P\left(Z > \frac{35 - 26}{6}\right) = P(Z > 1.5) = 1 - P(Z < 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$$

Luego el 6.68 % de las personas adultas son obesas.