MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2023
- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2023 (Ordinario)
Bloque Análisis

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

> *Hallar la función polinómica $f(x)$ que verifica que tiene un punto mínimo en $M(1,2)$ y su segunda derivada es: $f''(x) = 2x+3$. Dar la expresión de $f(x)$.*
>
> *(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Bloque A)*

Solución.

$$f'(x) = \int f''(x)\,dx = \int (2x+3)\,dx = x^2+3x+C \xRightarrow{f'(1)=0} 1+3+C=0$$

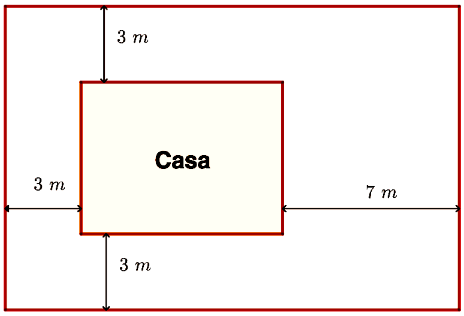
$$\xRightarrow{C=-4} f'(x) = x^2+3x-4 \quad \& \quad f''(1) = 2+3 = 5 > 0 \xRightarrow{(\cup)} \text{Mínimo en } x=1$$

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (x^2+3x-4)\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 4x + K \xRightarrow{f(1)=2} \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 4 + K = 2$$

$$\xRightarrow{K=25/6} \boxed{f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 4x + \frac{25}{6}}$$

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Se quiere construir una Casa de la Juventud de 240 m^2 de superficie, que estará rodeada por una zona ajardinada con las dimensiones de la imagen.



Si se quiere minimizar la superficie total de la zona ajardinada, ¿qué dimensiones debe tener la Casa de la Juventud? ¿Cuál es el área de la zona ajardinada?

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Bloque B)

Solución.

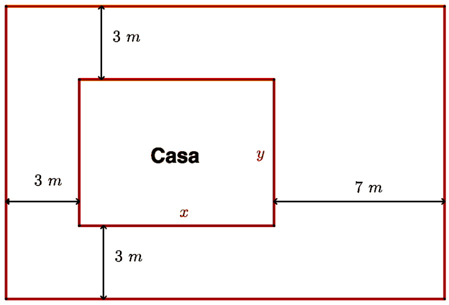
$S_{casa} = xy = 240 \implies y = \dfrac{240}{x}$

$S_{jar}(x, y) = (x + 10) \cdot (y + 6) - xy = 6x + 10y + 60$

$S_{jar}(x) = 6x + 10 \cdot \dfrac{240}{x} + 60$

$S'_{jar}(x) = 6 - \dfrac{2400}{x^2} = 0 \Rightarrow 6x^2 = 2400 \Rightarrow \begin{cases} \cancel{x = -20} \\ x = 20 \end{cases}$

$S''_{jar}(x) = \dfrac{4800}{x^3} \Rightarrow S''(20) = \dfrac{3}{5} > 0 \xrightarrow{(\cup)} \text{Mín. } x = 20$



Por lo tanto las dimensiones de la casa deberían ser $x = 20\ m$ e $y = \dfrac{240}{20} = 12\ m$ para que la superficie ajardinada sea mínima e igual a $S_{jar}(20) = 300\ m^2$.

Bloque Algebra

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) (0.75 puntos) Comprobar si la matriz $M = 2I_3 + B^\top$ tiene inversa, donde I_3 es la matriz identidad de orden 3.

b) (1.75 puntos) Justificar que existe la matriz X que verifica la ecuación siguiente:

$$2X + C = A - X \cdot B^\top$$

Calcular razonadamente dicha matriz X.

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Bloque A)

Solución.

a) $$M = 2I_3 + B^\top = 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \& \quad |M| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \exists\, M^{-1}$$

b) $$2X + C = A - X \cdot B^\top \Longrightarrow 2X + X \cdot B^\top = A - C \Longrightarrow X \cdot \underbrace{(2I + B^\top)}_{M} = A - C$$

$$\Longrightarrow X \cdot M = (A - C) \Longrightarrow X \cdot \underbrace{M \cdot M^{-1}}_{I} = (A - C) \cdot M^{-1} \Longrightarrow \boxed{X = (A - C) \cdot M^{-1}}$$

$$A - C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Adj}M = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad M^{-1} = \frac{1}{|M|} \cdot \mathrm{Adj}M^\top = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = (A - C) \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 10 & -3 & -5 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Un bar de tapas canario sólo ofrece tres platos en su menú: escaldón, tollos y carajacas. El precio medio de los tres platos (la ración) es de 5€. Se sirven 30 raciones de escaldón, 20 raciones de tollos y 10 raciones de carajacas, por lo que se ingresaron 255 euros en total. Sabiendo que el triple del precio de las caracajas supera en diez euros el doble del precio de los tollos. Calcula el precio de la ración de cada producto.

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Bloque B)

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{“Precio de la ración de escaldón (€)”} \\ y &\equiv \text{“Precio de la ración de tollos (€)”} \\ z &\equiv \text{“Precio de la ración de carajacas (€)”} \end{aligned}$$

Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y+z}{3} = 5 \\ 30x + 20y + 10z = 255 \\ 3z = 2y + 10 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 15 \\ 6x + 4y + 2z = 51 \\ -2y + 3z = 10 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones por el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 6 & 4 & 2 & 51 \\ 0 & -2 & 3 & 10 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 6F_1 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & -2 & -4 & -39 \\ 0 & -2 & 3 & 10 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & -2 & -4 & -39 \\ 0 & 0 & 7 & 49 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x + 5.5 + 7 = 15 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2y - 4 \cdot 7 = -39 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 7z = 49 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 2.5 \\ y = 5.5 \\ z = 7 \end{array}}$$

Bloque Geometría

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

En el espacio tridimensional consideramos el plano y las rectas siguientes:

$$\pi \equiv 2x+3y-z=4 \quad \& \quad r \equiv \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+5y+z=0 \end{cases} \quad \& \quad s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{1}$$

a) (1.25 puntos) Calcular el punto simétrico de $P(-2,1,2)$ respecto de π.

b) (1.25 puntos) Calcular el ángulo que forman r y s.

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Bloque A)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} R(0,0,0) \\ \vec{d_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (6,-3,3) \approx (2,-1,1) \end{cases} \quad \& \quad s \equiv \begin{cases} S(1,2,3) \\ \vec{d_s} = (1,0,1) \end{cases}$$

a) $$t \equiv \begin{cases} t \perp \pi \\ P \in t \end{cases} \implies t \equiv \begin{cases} P(-2,1,2) \\ \vec{d_t} = (2,3,-1) \end{cases} \implies t \equiv \begin{cases} x = -2+2\lambda \\ y = 1+3\lambda \\ z = 2-\lambda \end{cases}$$

$$Q = t \cap \pi \implies 2\cdot(-2+2\lambda) + 3\cdot(1+3\lambda) - (2-\lambda) = 4 \xrightarrow{\lambda = 1/2} Q(-1, 5/2, 3/2)$$

$$Q = M_{\overline{PP'}} = \frac{P+P'}{2} \Rightarrow P' = 2Q - P = 2\cdot(-1,5/2,3/2) - (-2,1,2) \Rightarrow \boxed{P'(0,4,1)}$$

b) $$\cos\alpha = \frac{\left|\vec{d_r}\cdot\vec{d_s}\right|}{\left|\vec{d_r}\right|\cdot\left|\vec{d_s}\right|} = \frac{|(2,-1,1)\cdot(1,0,1)|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}} = \frac{|2+0+1|}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \boxed{\alpha = 30°}$$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

En el espacio tridimensional tenemos las siguientes ecuaciones de rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x+2y-7z=0 \\ 2x+3y-12z+1=0 \end{cases} \qquad \& \qquad s \equiv \begin{cases} 2x-7y-3z=22 \\ x-y+z=1 \end{cases}$$

a) (1.25 puntos) Estudiar la posición relativa de r y s.

b) (1.25 puntos) Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Bloque B)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} R(-2,1,0) \\ \vec{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -7 \\ 2 & 3 & -12 \end{vmatrix} = (-3,-2,-1) \approx (3,2,1) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} S(-3,-4,0) \\ \vec{d_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -7 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-10,-5,5) \approx (2,1,-1) \end{cases}$$

a) $\overrightarrow{RS} = (-1,-5,0)$

$$\frac{3}{2} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1} \implies \vec{d_r} \nparallel \vec{d_s} \implies r \text{ y } s \text{ se cortan o se cruzan.}$$

$$\left[\vec{d_r}, \vec{d_s}, \overrightarrow{RS}\right] = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -22 \neq 0 \implies r \text{ y } s \text{ se cruzan.}$$

b) $$\pi \equiv \begin{cases} r \in \pi \\ \pi \parallel s \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} R(-2,1,0) \\ \vec{u} = \vec{d_r} = (3,2,1) \\ \vec{v} = \vec{d_s} = (2,1,-1) \end{cases} \implies \pi \equiv \begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\implies -3\cdot(x+2) + 5\cdot(y-1) - z = 0 \implies \boxed{\pi \equiv 3x-5y+z+11=0}$$

Bloque Probabilidad

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Según el estudio TALIS (2018), el 11 % de los docentes de Educación Secundaria en España son menores de 30 años.

a) (1 punto) Elegimos 15 docentes españoles, ¿qué probabilidad hay de que haya menos de 2 docentes menores de 30 años?

b) (1 punto) Supongamos que se seleccionan al azar 200 docentes españoles. ¿Qué probabilidad hay de que entre 20 y 30 docentes sean menores de 30 años?

c) (0.5 puntos) En un grupo de 500 docentes españoles, ¿cuántos cabe esperar que sean mayores de 30 años?

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Bloque A)

Solución.

$$X \equiv \text{“N}^{\text{o}} \text{ de docentes menores de 30 años”} \longrightarrow X : \mathcal{B}(15, 0.11)$$

a) $P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{15}{0} \cdot 0.11^0 \cdot 0.89^{15} + \binom{15}{1} \cdot 0.11^1 \cdot 0.89^{14}$

$= 0.4969$

b) $X : \mathcal{B}(200, 0.11) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n = 200 > 30 \checkmark \\ np = 22 > 5 \checkmark \\ nq = 178 > 5 \checkmark \end{array} \right\} \Rightarrow Y : \mathcal{N}(np, \sqrt{npq}) = \mathcal{N}(22, 4.425)$

$$\begin{aligned} P(20 \le X \le 30) &= P(19.5 \le Y \le 30.5) = P\Big(\frac{19.5 - 22}{4.425} \le Z \le \frac{30.5 - 22}{4.425}\Big) \\ &= P(-0.56 \le Z \le 1.92) = P(Z \le 1.92) - P(Z \le -0.56) \\ &= P(Z \le 1.92) - P(Z \ge 0.56) = P(Z \le 1.92) \\ &- \Big[1 - P(Z \le 0.56)\Big] = 0.9726 - (1 - 0.7123) = 0.6849 \end{aligned}$$

c) $X : \mathcal{B}(500, 0.11) \implies E\Big[\overline{X}\Big] = nq = 500 \cdot 0.89 = 445$ es la cantidad esperada de docentes que superen los 30 años.

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Las estaturas de las personas que se presentan a una audición para participar en una película siguen una distribución normal de media 168 *cm y desviación típica* 8 *cm.*

a) (1 punto) Si se selecciona una persona participante en la audición, averiguar la probabilidad de que tenga una estatura mayor a 156 *cm.*

b) (0.75 puntos) Se afirma que más del 15 % *de los participantes en la audición medían más de* 1.82 *metros. Justifica la veracidad o falsedad de dicha afirmación.*

c) (0.75 puntos) ¿Qué probabilidad hay de que, elegida una persona al azar, su estatura se encuentre entre 166 y 172 *cm?*

(Islas Canarias - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Bloque B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Estatura de los actores (cm)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(168, 8)$$

a) $P(X \geq 156) = P\left(Z \geq \dfrac{156-168}{8}\right) = P(Z \geq -1.5) = P(Z \leq 1.5) = 0.9332$

b) $P(X \geq 182) = P\left(Z \geq \dfrac{182-168}{8}\right) = P(Z \geq 1.75) = 1 - P(Z \leq 1.75)$

$= 1 - 0.9599 = 0.0401 < 15\,\% \implies$ la afirmación es falsa

c) $P(166 \leq X \leq 172) = P\left(\dfrac{166-168}{8} \leq Z \leq \dfrac{172-168}{8}\right) = P(-0.25 \leq Z \leq 0.5)$

$= P(Z \leq 0.5) - P(Z \leq -0.25) = P(Z \leq 0.5) - P(Z \geq 0.25)$

$= P(Z \leq 0.5) - \Big[1 - P(Z \leq 0.25)\Big] = 0.6915 - (1 - 0.5987)$

$= 0.2902$