MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2023

- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2023 (Ordinario)

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Sea la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} ax - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} + 2 & , \textit{ si } x \neq 0 \\ 2 & , \textit{ si } x = 0 \end{cases} , \quad a \in \mathbb{R}$$

a) (1 punto) Estudia su continuidad en $\mathbb{R}$ según los valores de a.

b) (1 punto) Calcula el valor de a para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = -\dfrac{\pi}{2}$ y di qué tipo de extremo es.

(Aragón - Matemáticas II - Junio 2023)

Solución.

a) $f(x) = ax - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} + 2$ es una función continua en $\mathbb{R} - \{0\}$. Veamos la continuidad en $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{ax^2 - \operatorname{sen} x + 2x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2ax - \cos x + 2}{1} = \frac{-1+2}{1} = 1 \ \forall a$$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0) \ \forall a \in \mathbb{R} \implies f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$, donde tiene una discontinuidad evitable.

b) $f'(x) = a - \dfrac{x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}$

$$f''(x) = -\frac{x^{\cancel{2}} \cdot (\cos x - x \cdot \operatorname{sen} x) - 2\cancel{x} \cdot (x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x)}{x^{\cancel{4}3}} = \frac{x \cdot \cos x + (x^2 - 2) \cdot \operatorname{sen} x}{x^3}$$

E. rel. en $x = -\dfrac{\pi}{2} \iff f'(-\pi/2) = 0 \quad \& \quad f''(-\pi/2) \neq 0$

$$f'(\pi/2) = a - \frac{0 - (-1)}{\pi^2/4} = 0 \implies \boxed{a = \frac{4}{\pi^2}}$$

$$f''(-\pi/2) = \frac{0 - (\frac{\pi^2}{4} - 2)}{-\pi^3/8} = \frac{2\pi^2 - 16}{\pi^3} > 0 \overset{(\cup)}{\implies} \text{Mínimo relativo en } x = -\frac{\pi}{2}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(x+1)^2}{x^2+3x+1}\right]^{\ln x}$$

(Aragón - Matemáticas II - Junio 2023)

Solución.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(x+1)^2}{x^2+3x+1}\right]^{\ln x} = [1^{\infty}] = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \ln x \cdot \left[\frac{(x+1)^2}{x^2+3x+1} - 1\right]}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} \ln x \cdot \left(\frac{\cancel{x^2}+2x+\cancel{1}-\cancel{x^2}-3x-\cancel{1}}{x^2+3x+1}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x\cdot\ln x}{x^2+3x+1}} = e^{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}$$

$$\overset{\text{L'Hôp}}{=} e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-\ln x + \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}}{2x+3}} = e^{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]} \overset{\text{L'Hôp}}{=} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1/x}{2}} = e^{-1/\infty} = e^{0} = 1$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2+4x$ *y la recta de pendiente* $\frac{1}{2}$ *que corta a* $f(x)$ *en* $x = \frac{7}{2}$.

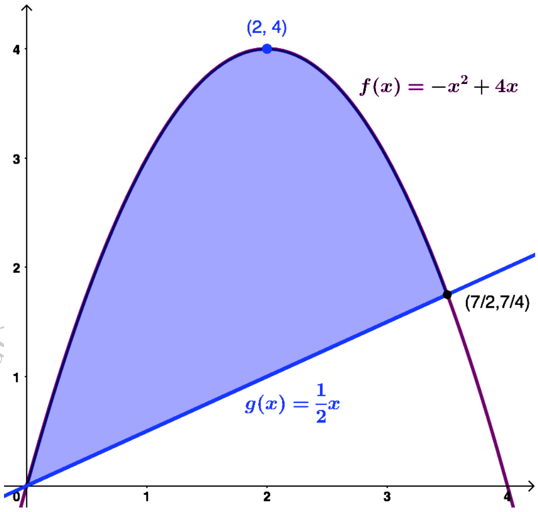
(Aragón - Matemáticas II - Junio 2023)

Solución.

$$r \equiv y = mx + n \implies y = \frac{1}{2}x + n$$

$$f(7/2) = 7/4 \implies (x_0, y_0) = (7/2, 7/4) \in r \implies \frac{7}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2} + n \xrightarrow{n=0} r \equiv y = \frac{1}{2}x$$

- $f(x) = -x^2+4x$ es una parábola *cóncava* ($\cap$) con vértice en $(2,0)$ y que pasa por los puntos $(0,0)$ y $(4,0)$.
- $g(x) = \frac{1}{2}x$ es una recta *creciente* que pasa por $(7/2, 7/4)$ y $(0,0)$.



Las dos funciones se cortan en:

$$f(x) = g(x) \implies -x^2 + 4x = \frac{1}{2}x$$

$$2x^2 - 7x = 0 \implies x = \{0, 7/2\}$$

$$\text{Área} = \int_0^{7/2} [f(x) - g(x)]\, dx = \int_0^{7/2} \left(-x^2 + \frac{7}{2}x\right) dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{4}\Bigg]_0^{7/2}$$
$$= \left(-\frac{343}{24} + \frac{343}{16}\right) - 0 = \frac{343}{48} \simeq 7.146\ u^2$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Dada la siguiente función:

$$f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}}$$

a) (0.75 puntos) Estudia y escribe su dominio de definición.

b) (1.25 puntos) Estudia la existencia de asíntotas y ramas parabólicas. determina las asíntotas caso de existir.

(Aragón - Matemáticas II - Junio 2023)

Solución.

a) $x^2 - x - 2 > 0 \xrightarrow[x=\{-1,2\}]{\text{Raíces}} \text{Dom}(f) = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,2)$	$(2,+\infty)$
Signo $f(x)$	$+$	$\nexists f(x)$	$+$

b)

- `A. Vertical:` $\exists$ A.V. en $x = -1^-$ y en $x = 2^+$

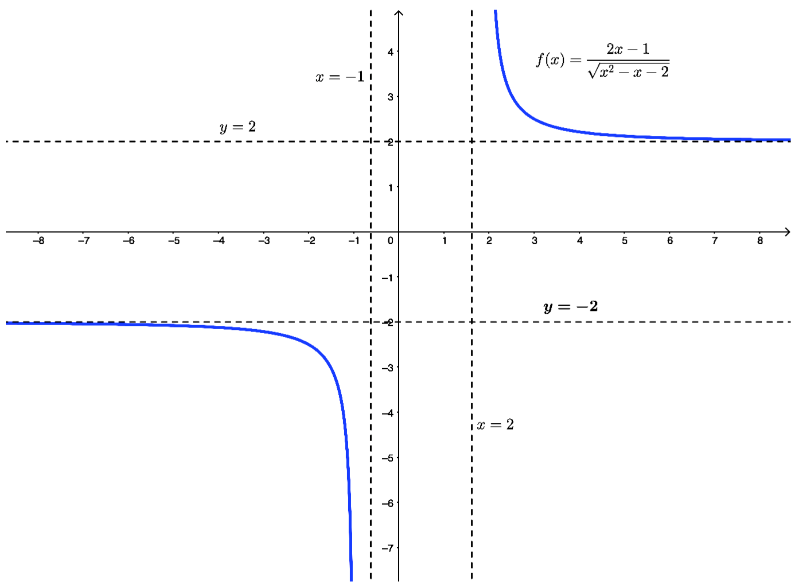
$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

- `A. Horizontal:` $\exists \underset{x\to-\infty}{\text{A.H.}}$ en $y = -2$ & $\underset{x\to+\infty}{\text{A.H.}}$ en $y = 2$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-2x-1}{\sqrt{x^2+x-2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{-2}{\sqrt{1}} = -2$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{2}{\sqrt{1}} = 2$$



Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Sean las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad C=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad D=A\cdot B^{\top}-2I,$$

donde $B^{\top}$ es la matriz traspuesta de B, e I es la matriz identidad de orden 3.

a) *(1 punto) Estudia si la matriz D tiene inversa y, en caso afirmativo, calcúlala.*

b) *(1 punto) Resuelve la ecuación matricial $C\cdot X=A^{\top}\cdot B$, donde $A^{\top}$ es la matriz traspuesta de A.*

(Aragón - Matemáticas II - Junio 2023)

Solución.

a) $$D=A\cdot B^{\top}-2I=\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}}-2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$|D|=-4\neq 0 \implies \exists\, D^{-1} \quad \& \quad \mathrm{Adj}D=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -4 & 12 & -1 \\ 4 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1}=\frac{1}{|D|}\cdot \mathrm{Adj}D^{\top}=\frac{1}{-4}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 4 & 12 & -8 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \implies \boxed{D^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1/4 & -1/2 \end{pmatrix}}$$

b) $$C\cdot X=A^{\top}\cdot B \implies \underbrace{C^{-1}\cdot C}_{I}\cdot X=C^{-1}\cdot(A^{\top}\cdot B) \implies \boxed{X=C^{-1}\cdot(A^{\top}B)}$$

$$A^{\top}B=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad C^{-1}=-\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X=C^{-1}\cdot(A^{\top}\cdot B)=-\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \implies \boxed{X=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -8/3 & 2/3 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 6 (2 *puntos*)

Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -x + mz = 0 \\ my + 2z = 2 + m^2 \\ x + y = 2m \end{cases}$$

a) (1.2 puntos) Discute según los valores de $m \in \mathbb{R}$, qué tipo de sistema es atendiendo a las posibles soluciones (compatible determinado o indeterminado, incompatible).

b) (0.8 puntos) Resuelve el sistema para el valor $m = 2$.

(Aragón - Matemáticas II - Junio 2023)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & m & 0 \\ 0 & m & 2 & 2+m^2 \\ 1 & 1 & 0 & 2m \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -m^2 + 2 = 0 \implies m = \pm\sqrt{2}$$

- Si $m \neq \pm\sqrt{2}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $m = -\sqrt{2} \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -2\sqrt{2} \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} -1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -2\sqrt{2} \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

- Si $m = \sqrt{2} \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2\sqrt{2} \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} -1 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2\sqrt{2} \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

ran$(A) = 2 =$ ran$(A^*) \neq$ nº incóg. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $m = 2$, teniendo en cuenta que se trata de un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ F_3 + F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ 2F_3 - F_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow -x + 2 = 0 \\ \Rightarrow 2y + 2 = 6 \\ \Rightarrow 2z = 2 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{array}}$$

Ejercicio 7 (2 *puntos*)

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Calcula la matriz A^n para $n \in \mathbb{N}$.

b) (1 punto) Resuelve la ecuación $(A+2I)\cdot X = B$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

(Aragón - Matemáticas II - Junio 2023)

Solución.

a) $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

$$A^2 = A\cdot A = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 6 & -12 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2}A$$

$$A^3 = A^2\cdot A = -\frac{3}{2}A\cdot A = -\frac{3}{2}A^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 A$$

$$\boxed{A^n = \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1} A} = \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{A^n = \frac{(-3)^{n-1}}{2^n}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}}$$

`Método de inducción:`

- `Caso Base:` $A^1 = \left(-\frac{3}{2}\right)^{1-1} A = \left(-\frac{3}{2}\right)^0 A = A$
- `Hipótesis inducción:` $A^k = \left(-\frac{3}{2}\right)^{k-1} A$
- `Paso inductivo:`

$$A^{k+1} = A\cdot A^k = A\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^{k-1} A = \left(-\frac{3}{2}\right)^{k-1} A^2 = \cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^{k-1}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)A$$

$$= \left(-\frac{3}{2}\right)^{k} A = \left(-\frac{3}{2}\right)^{(k+1)-1} A \quad q.e.d.$$

b) $(A+2I)\cdot X = B \Rightarrow \underbrace{(A+2I)^{-1}\cdot(A+2I)}_{I}\cdot X = (A+2I)^{-1}\cdot B \Rightarrow \boxed{X = (A+2I)^{-1}\cdot B}$

$$A+2I = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad (A+2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 5/2 \end{pmatrix}$$

$$X = (A+2I)^{-1}\cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 5/2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 15/2 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 8 (2 *puntos*)

El plano $\pi \equiv 2x + by - 2z + 4 = 0,\ b \in \mathbb{R}$ *y* $b \neq 0$, *corta a los ejes de coordenadas en tres puntos* A, B *y* C. *Calcula los valores de* $b \in \mathbb{R}$ *tal que el área del triángulo que determinan estos tres puntos* A, B *y* C *sea* $6\ u^2$.

(Aragón - Matemáticas II - Junio 2023)

Solución.

$$\left.\begin{array}{l} A = \pi \cap OX \xrightarrow[z=0]{y=0} A(-2,0,0) \\ B = \pi \cap OY \xrightarrow[z=0]{x=0} B(0,-4/b,0) \\ C = \pi \cap OZ \xrightarrow[y=0]{x=0} C(0,0,2) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2,-4/b,0) \\ \overrightarrow{AC} = (2,0,2) \end{cases}$$

$$\text{Área}_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -4/b & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|(-8/b,-4,8/b)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{64}{b^2}+16+\frac{64}{b^2}} = 6 \Longrightarrow \frac{128}{b^2}+16 = 144 \Longrightarrow 128b^2 = 128 \Longrightarrow \boxed{b = \pm 1}$$

Ejercicio 9 (2 *puntos*)

Si los vetores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ *son linealmente independientes,*

a) (1 punto) Comprueba si los vectores $\left\{\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}\right\}$ *son linealmente dependientes o independientes, siendo:*

$$\vec{r} = 2\vec{u} + \vec{w} \quad \& \quad \vec{s} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{w} \quad \& \quad \vec{t} = -3\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$$

b) (1 punto) Si además, los vectores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ *son ortogonales y unitarios, calcula razonadamente* $\vec{u} \cdot \vec{r} + \vec{v} \cdot \vec{s} + \vec{w} \cdot \vec{t}$*, donde* $\cdot$ *representa el producto escalar de dos vectores.*

(Aragón - Matemáticas II - Junio 2023)

Solución.

a) Como los vectores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ son linealmente independientes forman una base en $\mathbb{R}^3$. Las coordenadas de $\left\{\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}\right\}$ en esa base son:

$$\vec{r} = (2, 0, 1) \qquad \& \qquad \vec{s} = (1, 1, -1) \qquad \& \qquad \vec{t} = (-3, -1, 1)$$

$$\left[\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}\right] = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \implies \left\{\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}\right\} \text{ son linealmente independientes.}$$

b) Trabajando en la base ortonormal $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{r} + \vec{v} \cdot \vec{s} + \vec{w} \cdot \vec{t} &= (1, 0, 0) \cdot (2, 0, 1) + (0, 1, 0) \cdot (1, 1, -1) + (0, 0, 1) \cdot (-3, -1, 1) \\ &= (2 + 0 + 0) + (0 + 1 + 0) + (0 + 0 + 1) = 4 \end{aligned}$$

Ejercicio 10 (2 *puntos*)

El contenido total en sulfitos (medido en mg/l) del vino que se produce en una bodega, sigue una distribución normal de media 150 mg/l y desviación típica 30 mg/l. La bodega se compromete a vender solamente vinos con un contenido total en sulfitos inferior a 200 mg/l, por lo que se desechan para la venta aquellos que superen esta cantidad. Se pide,

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que un vino producido en la bodega se deseche por la elevada cantidad total de sultitos?

b) (1 punto) ¿Qué porcentaje de los vinos producidos en esta bodega tienen un contenido total en sulfitos entre 110 y 150 mg/l?

(Aragón - Matemáticas II - Junio 2023)

Solución.

$$X \equiv \text{“Contenido total en sulfitos (mg/l)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(150, 30)$$

a) $$\begin{aligned} P(X \geq 200) &= P\left(Z \geq \frac{200-150}{30}\right) = P(Z \geq 1.67) = 1 - P(Z \leq 1.67) \\ &= 1 - 0.9525 = 0.0475 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(110 \leq X \leq 150) &= P\left(\frac{110-150}{30} \leq Z \leq \frac{150-150}{30}\right) = P(-1.33 \leq Z \leq 0) \\ &= P(Z \leq 0) - P(Z \leq -1.33) = P(Z \leq 0) - P(Z \geq 1.33) \\ &= P(Z \leq 0) - \Big[1 - P(Z \leq 1.33)\Big] = 0.5 - (1 - 0.9082) \\ &= 0.4082 \Longrightarrow 40.82\,\% \end{aligned}$$