MATEMATICAS II

EXAMENES RESUELTOS

EVAU JULIO 2023

- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2023 (Extraordinario)

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Dada la siguiente función

$$f(x) = (e^{ax} + b) \cdot x - e$$

a) (1 punto) Calcula los valores de a y b, sabiendo que dicha función tiene un extremo relativo en $x = 0$ y un punto de inflexión en $x = 2$.

b) (1 punto) Para los valores $a = 1$ y $b = 2$, calcula $\int x \cdot f(x)\, dx$.

(Aragón - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

a) $f(x) = (e^{ax} + b) \cdot x - e$

$f'(x) = ax \cdot e^{ax} + e^{ax} + b = e^{ax} \cdot (ax + 1) + b$

$f''(x) = e^{ax} \cdot (a^2x + a) + a \cdot e^{ax} = e^{ax} \cdot (a^2x + 2a)$

$f'''(x) = e^{ax} \cdot (a^3x + 2a^2) + a^2 \cdot e^{ax} = e^{ax} \cdot (a^3x + 3a^2)$

$$\text{E. rel en } x = 0 \xrightarrow[f''(0)\neq 0]{f'(0)=0} \begin{cases} e^0 \cdot (0+1) + b = 0 \implies \boxed{b = -1} \\ f''(0) = e^0 \cdot (0 + 3a^2) \neq 0 \implies a \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{P.I. } x = 2 \xrightarrow[f'''(2)\neq 0]{f''(2)=0} \begin{cases} e^{2a} \cdot (2a^2 + 2a) = e^{2a} \cdot 2a \cdot (a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{2a} = 0 \Rightarrow \nexists \text{ Sol.} \\ \cancel{a = 0} \xrightarrow{a\neq 0} \\ a + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a = -1} \end{cases} \\ f'''(2) = e^{-2} \cdot (-2+3) = e^{-2} \neq 0 \checkmark \end{cases}$$

b) $\displaystyle\int x \cdot f(x)\, dx = \int \left[(e^x + 2) \cdot x^2 - ex\right] dx = \int x^2 \cdot e^x\, dx + \int (2x^2 - ex)\, dx$

$$\overset{\odot}{=} (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x + \frac{2x^3}{3} - \frac{ex^2}{2} + C$$

$$\odot \int x^2 \cdot e^x\, dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x^2 & \Rightarrow du = 2x\, dx \\ dv = e^x\, dx & \Rightarrow v = e^x \end{array} \right\} = x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x\, dx$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} u = 2x & \Rightarrow du = 2\, dx \\ dv = e^x\, dx & \Rightarrow v = e^x \end{array} \right\} = x^2 \cdot e^x - \left[2x \cdot e^x - \int 2e^x\, dx\right]$$

$$= x^2 \cdot e^x - (2x \cdot e^x - 2e^x) + C = (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x + C$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, para que el siguiente límite sea finito y calcula el valor de dicho límite

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1) - a\cdot \operatorname{sen} x + 3x\cdot\cos(2x)}{x^2}$$

(Aragón - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1) - a\cdot \operatorname{sen} x + 3x\cdot\cos(2x)}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1} - a\cdot\cos x + 3\cdot\cos(2x) - 6x\cdot\operatorname{sen}(2x)}{2x} = \frac{1-a+3-0}{0} = \frac{4-a}{0}$$

$$L \neq \infty \iff 4-a=0 \implies \boxed{a=4}$$

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1} - 4\cdot\cos x + 3\cdot\cos(2x) - 6x\cdot\operatorname{sen}(2x)}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{(x+1)^2} + 4\cdot\operatorname{sen} x - 6\cdot\operatorname{sen}(2x) - 6\cdot\operatorname{sen}(2x) - 12x\cdot\cos(2x)}{2}$$

$$= \frac{-1+0-0-0-0}{2} \implies \boxed{L = -\frac{1}{2}}$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Descompón el número $\sqrt{3}$ en dos sumandos positivos, de forma que la suma de sus respectivos logaritmos en base 3 sea máxima y calcula esta suma de forma exacta.

(Aragón - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

$$x+y=\sqrt{3} \implies y = \sqrt{3}-x$$

$$S(x,y) = \log_3 x + \log_3 y = \log_3(x\cdot y) \implies S(x) = \log_3\left[x\cdot(\sqrt{3}-x)\right] = \log_3\left(\sqrt{3}x - x^2\right)$$

$$S'(x) = \frac{\sqrt{3}-2x}{\sqrt{3}x-x^2}\cdot\log_3 e = 0 \implies \sqrt{3}-2x=0 \implies \boxed{x = \sqrt{3}/2}$$

$$S''(x) = \frac{-2\cdot(\sqrt{3}x-x^2) - (\sqrt{3}-2x)^2}{(\sqrt{3}x-x^2)^2}\cdot\log_3 e \Rightarrow S''(\sqrt{3}/2) = -\frac{8\log_3 e}{3} < 0 \overset{(\cap)}{\Longrightarrow} \text{Máximo}$$

Por lo tanto la suma de logaritmos es máxima para $x = \sqrt{3}/2$ & $y = \sqrt{3} - \sqrt{3}/2 = \sqrt{3}/2$ y vale $S(\sqrt{3}/2) = \log_3\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\right) = \log_3\frac{3}{4} = \cancelto{1}{\log_3 3} - \log_3 4 = 1 - \log_3 4 = 1 - 2\log_3 2$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Para la siguiente función

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 2x + 1}$$

a) (1 punto) Indica el dominio de definición y estudia su monotonía.

b) (1 punto) Estudia la curvatura de la función (concavidad $\cap$ y convexidad $\cup$) y la existencia de puntos de inflexión, y calcúlalos si existen.

(Aragón - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 2x + 1} = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$ & $(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \implies \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x-1)^{\cancel{2}} - x^2 \cdot 2 \cdot \cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{4}3}} = \frac{-2x}{(x-1)^3} = 0 \implies -2x = 0 \implies x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo $f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(0,1)$ y *decreciente* en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(0,0)$.

b) $$f''(x) = \frac{-2 \cdot (x-1)^{\cancel{3}} + 2x \cdot 3 \cdot \cancel{(x-1)^2}}{(x-1)^{\cancel{6}4}} = \frac{4x+2}{(x-1)^4} = 0 \Rightarrow 4x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1/2$$

	$(-\infty, -1/2)$	$(-1/2, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo $f''(x)$	-	+	+
$f(x)$	Cóncava $\cap$	Convexa $\cup$	Convexa $\cup$

La función $f(x)$ es *cóncava* ($\cap$) en $(-\infty, -1/2)$ y *convexa* ($\cup$) en $(-1/2, 1) \cup (1, +\infty)$, y tiene un *punto de inflexión* en $(-1/2, 1/9)$.

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 2 & m & m+2 \\ m-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Discute el rango de la matriz A según los valores de $m \in \mathbb{R}$

b) (1 punto) Calcula la inversa de la matriz A para el valor $m = 1$.

(Aragón - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

a) $|A| = -m^3 + 2m = m \cdot (-m^2 + 2) = 0 \implies m = \left\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\right\}$

- Si $m \neq \left\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\right\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 3$
- Si $m = \left\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\right\}$ $\quad |A| = 0 \Rightarrow \operatorname{ran}(A) < 3$, y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m + 2 \neq 0$

  $\forall m \in \left\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\right\} \implies \operatorname{ran}(A) = 2$

b) Para $m = 1 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ & $|A| = -1^3 + 2 \cdot 1 = 1$

$$\operatorname{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \& \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{Adj}A^{\top} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6 (2 *puntos*)

Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ a & b & c \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}$, *calcula razonadamente el determinante de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 4a+2 & 4b+4 & 4c+6 \\ 3a & 3b & 3c \\ a+4 & b & c+5 \end{pmatrix}^2$$

(Aragón - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

$$|B| = \begin{vmatrix} 4a+2 & 4b+4 & 4c+6 \\ 3a & 3b & 3c \\ a+4 & b & c+5 \end{vmatrix} = \overset{F_1 = \frac{4}{3}F_2}{\begin{vmatrix} 4a & 4b & 4c \\ 3a & 3b & 3c \\ a+4 & b & c+5 \end{vmatrix}} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3a & 3b & 3c \\ a+4 & b & c+5 \end{vmatrix}$$

$$= \overset{F_2 = 3F_3}{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3a & 3b & 3c \\ a & b & c \end{vmatrix}} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3a & 3b & 3c \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3a & 3b & 3c \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= [F_2 \leftrightarrow F_3] = -6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ a & b & c \end{vmatrix} = -6 \cdot \frac{1}{2} = -3 \Rightarrow |A| = \left|B^2\right| = |B|^2 = (-3)^2 \Rightarrow \boxed{|A| = 9}$$

Ejercicio 7 (2 *puntos*)

Una ONG aragonesa de reciente creación tiene tres sedes, una en Huesca, otra en Zaragoza y otra en Teruel,. El número total de voluntarios es de 31. Para que Huesca y Zaragoza tuvieran el mismo número de voluntarios tendrían que trasladarse 3 de Huesca a Zaragoza. Además, el número de los voluntarios de la sede de Huesca excede en 1 a la suma de los voluntarios de las otras dos sedes. ¿Cuántos voluntarios hay en cada una de las tres sedes?

(Aragón - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

Sean las incógnitas:

$$
\begin{aligned}
x &\equiv \text{“Nº de voluntarios en la sede de Huesca”}\\
y &\equiv \text{“Nº de voluntarios en la sede de Zaragoza”}\\
z &\equiv \text{“Nº de voluntarios en la sede de Teruel”}
\end{aligned}
$$

Del enunciado tenemos:

$$
\begin{cases} x+y+z=31 \\ x-3=y+3 \\ x-1=y+z \end{cases} \implies \begin{cases} x+y+z=31 \\ x-y=6 \\ x-y-z=1 \end{cases}
$$

Resolvemos el sistema por el método de Gauss:

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 31 \\ 1 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 31 \\ 0 & -2 & -1 & -25 \\ 0 & -2 & -2 & -30 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3-F_2 \end{array}\right]
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 31 \\ 0 & -2 & -1 & -25 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x+10+5=31 \\ \Rightarrow -2y-5=-25 \\ \Rightarrow -z=-5 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=16 \\ y=10 \\ z=5 \end{array}}
$$

Ejercicio 8 (2 *puntos*)

Si los vectores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ *son linealmente independientes,*

a) *(1.2 puntos) Comprueba si los vectores* $\{\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}\}$ *son linealmente dependientes o independientes, siendo:*

$$\vec{r} = \vec{u} - \vec{v} - 2\vec{w} \qquad \& \qquad \vec{s} = \vec{u} + 3\vec{w} \qquad \& \qquad \vec{t} = 2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$$

b) *(0.8 puntos) Calcula razonadamente* $3\vec{s} \times (\vec{t} - \vec{r})$, *donde* $\times$ *representa el producto vectorial de dos vectores.*

(Aragón - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

a) Si los vectores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ son linealmente independientes forman una base. En esta base los vectores $\{\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}\}$ tienen las coordenadas:

$$\vec{r} = (1, -1, -2) \qquad \& \qquad \vec{s} = (1, 0, 3) \qquad \& \qquad \vec{t} = (2, -1, 1)$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{los vectores } \{\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}\} \text{ son linealmente dependientes.}$$

b) $3\vec{s} = (3, 0, 9) \quad \& \quad \vec{t} - \vec{r} = (2, -1, 1) - (1, -1, -2) = (1, 0, 3)$

$3\vec{s} \times (\vec{t} - \vec{r}) = \begin{vmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \\ 3 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (0, 0, 0) = \vec{0}$, esto es debido a que los vectores $3\vec{s}$ y $(\vec{t} - \vec{r})$ son proporcionales.

Ejercicio 9 (2 *puntos*)

De los turistas que llegaron a España el mes pasado, el 35 % visitaron Aragón. Si seleccionamos al azar y de manera independiente 7 turistas que llegaron a España el mes pasado.

a) (1 punto) Razona, sin hacer uso de la calculadora: ¿Qué es más probable, que 2 de estos turistas visitaran Aragón o que sean 5 los que visitaron nuestra Comunidad Autónoma?

b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que alguno de los 7 turistas haya visitado Aragón.

(Aragón - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

$$X \equiv \text{“Nº de turistas que visitaron Aragón”} \longrightarrow X : \mathcal{B}(7, 0.35)$$

a) Como $E[X] = np = 7 \cdot 0.35 = 2.45$, es más probable que sean 2 los turistas que visitan Aragón, en lugar de 5.

b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{7}{0} \cdot 0.35^0 \cdot 0.65^7 = 1 - 0.0490 = 0.951$

Ejercicio 10 (2 *puntos*)

En el club deportivo Ares, se juegan tres modalidades de raqueta: pádel, tenis y frontón-tenis. Cada socio del club sólo puede apuntarse a una única modalidad. El 60 % se apuntó a pádel, el 25 % a tenis y el 15 % a frontón-tenis. En los campeonatos anuales entre clubes deportivos, participaron todos los socios del club Ares, de los cuales han conseguido medalla el 21 % de los jugadores de pádel, el 30 % de los jugadores de tenis y el 12 % de los jugadores de frontón-tenis.

a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un jugador de raqueta del club, seleccionado al azar, haya obtenido una medalla.

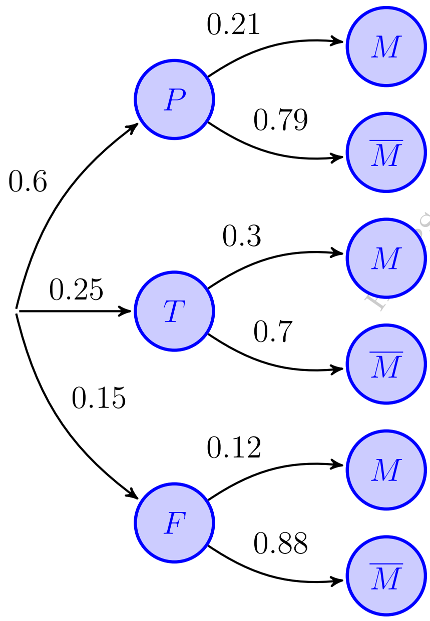
b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un jugador con medalla, seleccionado al azar, sea jugador de la modalidad tenis.

(Aragón - Matemáticas II - Julio 2023)

Solución.

Sean los sucesos:

$$
\begin{aligned}
P &\equiv \text{“El socio juega al pádel”}\\
T &\equiv \text{“El socio juega al tenis”}\\
F &\equiv \text{“El socio juega al frontón-tenis”}\\
M &\equiv \text{“El socio consigue medalla en los campeonatos”}
\end{aligned}
$$



a) $$
\begin{aligned}
P(M) &= P\big((P\cap M)\cup(T\cap M)\cup(F\cap M)\big)\\
&= P(P\cap M)+P(T\cap M)+P(F\cap M)\\
&= P(P)\cdot P(M\mid P)+P(T)\cdot P(M\mid T)\\
&+ P(F)\cdot P(M\mid F) = 0.6\cdot 0.21\\
&+ 0.25\cdot 0.3 + 0.15\cdot 0.12 = 0.219
\end{aligned}
$$

b) $$
\begin{aligned}
P(T\mid M) &= \frac{P(T\cap M)}{P(M)} = \frac{P(T)\cdot P(M\mid T)}{P(M)}\\
&= \frac{0.25\cdot 0.3}{0.219} = 0.3425
\end{aligned}
$$