MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU MODELO 2024

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Modelo 2024

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se consideran las matrices A y B dadas por

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 4 & c \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Determine los valores de los parámetros a, $c \in \mathbb{R}$ para los que se verifica

$$A \cdot B = 6B$$

b) (1 punto) Para $a = 1$ y $c = -1$, calcule $B^\top \cdot A \cdot B$, donde $B^\top$ denota la matriz transpuesta de B.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2024)

Solución.

a) $A \cdot B = 6B \implies \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 4 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ c \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ c \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} a+c+2 \\ a+c+2 \\ 5+c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6c \end{pmatrix}$

$$\implies \begin{cases} a+c+2 = 6 \implies \begin{cases} \xRightarrow{c=1} \boxed{a=3} \quad \& \quad \boxed{c=1} \\ \xRightarrow{c=5} \boxed{a=-1} \quad \& \quad \boxed{c=5} \end{cases} \\ 5+c^2 = 6c \implies c^2 - 6c + 5 = 0 \implies c = \{1, 5\} \end{cases}$$

b) Para $a = 1$ y $c = -1$ tenemos: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$B^\top \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-2)$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = x^3 + x^2 - x - a$$

a) (1 punto) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ tenga una primitiva que pase por los puntos $(0, 1)$ y $(-1, 1/4)$. Señale la expresión de esta primitiva.

b) (1 punto) Para $a = 1$, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función clasificando, si procede, los extremos relativos de la función.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2024)

Solución.

a) $F(x) = \int f(x)\,dx = \int \left(x^3 + x^2 - x - a\right) dx = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - ax + C$

$F(0) = 1 \implies \boxed{C = 1}$

$F(-1) = \dfrac{1}{4} \implies \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} + a + 1 = \dfrac{1}{4} \implies \boxed{a = -1/6}$

$$\boxed{F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} + 1}$$

b) Para $a = 1$ $\quad f(x) = x^3 + x^2 - x - 1 \quad \& \quad f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 0 \implies x = \{-1, 1/3\}$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1/3)$	$(1/3, +\infty)$
Signo $f'(x)$	$+$	-	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, -1) \cup (1/3, +\infty)$ y *decreciente* en $(-1, 1/3)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(1/3, -32/27)$ y un *máximo relativo* en $(-1, 0)$.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & , \text{ si } x < 1 \\ x^2+2x+1 & , \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) *(1 punto) Estudie la continuidad de la función $f(x)$ e indique el tipo de discontinuidad si procede.*

b) *(1 punto) Calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2024)

Solución.

a) $x - 1 = 0 \implies x = 1 \notin (-\infty, 1) \implies \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

- `Continuidad en` $x = 1$:
  - $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cancel{x-1}\cdot(x+1)}{\cancel{x-1}} = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2$
  - $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+2x+1\right) = 4$
  - $f(1) = 4$

  Como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, la función $f(x)$ tiene una discontinuidad inevitable de salto finito en $x = 1$.

Por lo tanto la función $f(x)$ es continua en $R - \{1\}$, donde tiene una discontinuidad inevitable de salto finito.

b) Entre las rectas $x = 1$ y $x = 2$ la función $f(x) = x^2 + 2x + 1$. Hallamos sus puntos de corte con el eje $OX \implies f(x) = x^2 + 2x + 1 = 0 \implies x = -1 \notin \text{Dom}(f_2)$. Esto define un único recinto de integración $A_1 : (1, 2)$.

$$A_1 = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \left(x^2+2x+1\right) dx = \left.\frac{x^3}{3} + x^2 + x\right]_1^2$$
$$= \left(\frac{8}{3} + 4 + 2\right) - \left(\frac{1}{3} + 1 + 1\right) = \frac{19}{3}$$
$$Area = |A_1| = \frac{19}{3} \simeq 6.33\ u^2$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^3 + 4x}{x^2 - 4}$$

a) (1 punto) Determine las asíntotas de esta función.

b) (1 punto) Obtenga la ecuación de la recta tagente a la función en el punto de abscisa $x = -1$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2024)

Solución.

a) $x^2 - 4 = 0 \implies x = \pm 2 \implies \text{Dom}(x) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- `A. Vertical:` $\exists$ A.V. en $x = -2$ y $x = 2$

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \left[\frac{-16}{0}\right] = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to -2^-} f(x) = \frac{-16}{0^+} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to -2^+} f(x) = \frac{-16}{0^-} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \left[\frac{16}{0}\right] = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to 2^-} f(x) = \frac{16}{0^-} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 2^+} f(x) = \frac{16}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

- `A. Horizontal:` $y = \displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 + 4x}{x^2 - 4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \pm\infty \Rightarrow \nexists$ A.H.

- `A. Oblicua:` $\exists$ A.O. en $y = x$

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 + 4x}{x^3 - 4x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{1} = 1$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3 + 4x}{x^2 - 4} - x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{x^3} + 4x - \cancel{x^3} + 4x}{x^2 - 4}$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{8x}{x^2 - 4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 0$$

b) $x_0 = -1 \implies y_0 = f(x_0) = f(-1) = 5/3 \implies (x_0, y_0) = (-1, 5/3)$

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 4) \cdot (x^2 - 4) - (x^3 + 4x) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$m_r = f'(x_0) = f'(-1) = \frac{7 \cdot (-3) - (-5) \cdot (-2)}{9} = -\frac{31}{9}$$

$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \implies y - \frac{5}{3} = \frac{-31}{9} \cdot (x + 1) \implies \boxed{r \equiv y = -\frac{31}{9}x - \frac{16}{9}}$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Se desea vender batido de chocolate y batido de fresa en una fiesta escolar para recaudar fondos para el viaje de fin de curso. Con la leche de la que se dispone se pueden elaborar 35 litros de batido, y hay cacao en polvo para 30 litros de batido de chocolate como máximo. Se necesitan 15 minutos de preparación por litro de batido de chocolate y 20 minutos por litro de batido de fresa para que tengan la textura correcta. Los batidos tienen que estar listos en 10 horas. Solo hay una batidora y el beneficio que se obtendrá por litro de batido de chocolate es de 10 euros, y por litro de batido de fresa de 11 euros.
¿Cuántos litros de cada tipo de batido se deben producir para maximizar los beneficios? ¿Cuál es el beneficio máximo?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2024)

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Producción de batido de chocolate (litros)"
  $y \equiv$ "Producción de batido de fresa (litros)"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

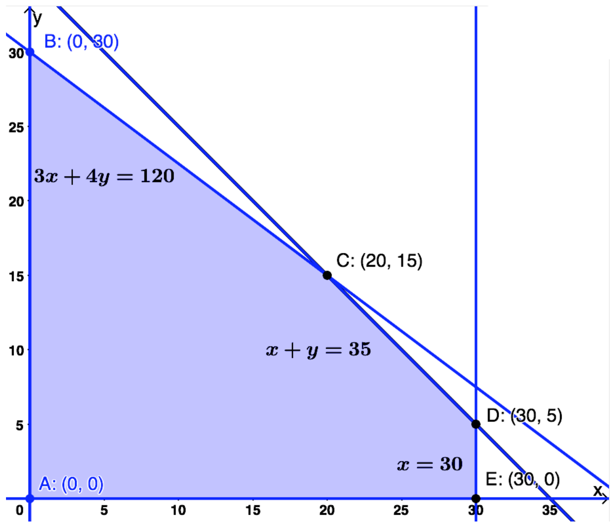
$$\begin{cases} ① \; x+y \le 35 \\ ② \; x \le 30 \\ ③ \; 15x+20y \le 10\cdot 60 \\ x,y \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \; x+y \le 35 & \to (0,35) \quad \& \quad (35,0) \\ ② \; x \le 30 & \to (30,0) \\ ③ \; 3x+4y \le 120 & \to (0,30) \quad \& \quad (40,0) \\ x,y \ge 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = 10x + 11y \quad$ (euros)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	30	330
C	20	15	365
D	30	5	355
E	30	0	300



El *beneficio máximo* es de 365 €, produciendo 20 litros de batido de chocolate y 15 de fresa.

Ejercicio 6 (2 *puntos*)

Una caja de Lego contiene un total de 50 *piezas de tres tipos diferentes* (A, B, C). *La cantidad de piezas del tipo A más la del tipo B es igual a cuatro veces la cantidad del tipo C. Si a las piezas del tipo A le sumamos el doble de las piezas del tipo B y cuatro veces las del tipo C, el total de piezas de la caja sería de* 100. *Plantee un sistema de ecuaciones para saber la cantidad de piezas de cada tipo que contendrá la caja.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2024)

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{“Nº de piezas del tipo } A\text{”} \\ y &\equiv \text{“Nº de piezas del tipo } B\text{”} \\ z &\equiv \text{“Nº de piezas del tipo } C\text{”} \end{aligned}$$

Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} x+y+z=50 \\ x+y=4z \\ x+2y+4z=100 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x+y+z=50 \\ x+y-4z=0 \\ x+2y+4z=100 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 100 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 0 & 0 & -5 & -50 \\ 0 & 1 & 3 & 50 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x+20+10=50 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -5z=-50 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y+3\cdot 10=50 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=20 \\ z=10 \\ y=20 \end{array}}$$

Ejercicio 7 (2 *puntos*)

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} a^2x - ay = a \\ a^3x - y = 1 \end{cases}$$

a) *(1 punto) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.*

b) *(1 punto) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 2$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2024)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{cc|c} a^2 & -a & a \\ a^3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = a^4 - a^2 = a^2 \cdot (a^2 - 1) = 0 \implies a = \{-1, 0, 1\}$$

- Si $a \neq \{0, -1, 1\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} \xRightarrow{\textit{Rouche}}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = -1 - \lambda \\ y = \lambda \end{array} , \lambda \in \mathbb{R}}$$

Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

- Si $a = 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \Rightarrow x = \lambda \\ \Rightarrow -y = 1 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = \lambda \\ y = -1 \end{array} , \lambda \in \mathbb{R}}$$

Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

- Si $a = 1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \end{array} , \lambda \in \mathbb{R}}$$

Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 2$, teniendo en cuenta que se trata de un S.C.D.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 2 \\ 8 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xRightarrow{4x+2=2} \\ \xRightarrow{3y=-3} \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 0 \\ y = -1 \end{array}}$$

Ejercicio 8 (2 *puntos*)

Un estudio europeo sobre hábitos de uso de internet indica que el 62 % de los hombres españoles mayores de 16 años participa en redes sociales y que el 81 % lee noticias en internet. Además, el 95 % de los hombres de este estudio participa en redes sociales o lee noticias en internet. Eligiendo un hombre español mayor de 16 años al azar, calcule la probabilidad de que:

a) (1 punto) Participe en redes sociales y lea notcias en internet.

b) (1 punto) No participe en redes sociales, sabiendo que no lee noticias en internet.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2024)

Solución.

Sean los sucesos:

$$R \equiv \text{“El hombre participa en redes sociales”}$$
$$N \equiv \text{“El hombre lee noticias en internet”}$$

Del enunciado tenemos:

$$P(R) = 0.62 \qquad \& \qquad P(N) = 0.81 \qquad \& \qquad P(R \cup N) = 0.95$$

a) $P(R \cap N) = P(R) + P(N) - P(R \cup N) = 0.62 + 0.81 - 0.95 = 0.48$

b) $P(\overline{R} \mid \overline{N}) = \dfrac{P(\overline{R} \cap \overline{N})}{P(\overline{N})} = \dfrac{P(\overline{R \cup N})}{1 - P(N)} = \dfrac{1 - P(R \cup N)}{1 - P(N)} = \dfrac{1 - 0.95}{1 - 0.81} = 0.2631$

Ejercicio 9 (2 *puntos*)

Se sabe que la proporción de hogares españoles con dos o más ordenadores es $p = 0.75$. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 140$ hogares. Determine:

a) (1 punto) El número esperado de hogares que no tendrán dos o más ordenadores en la muestra elegida.

b) (1 punto) La probabilidad de que, en la muestra de 140 hogares, el número de ellos con dos o más ordenadores sea entre 98 y 112 hogares.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2024)

Solución.

$$X \equiv \text{“Nº de hogares con dos o más ordenadores”} \longrightarrow X : \mathcal{B}(140, 0.75)$$

a) $E[X] = n \cdot p = 140 \cdot 0.75 = 105$ es la media de hogares con dos o más ordenadores, por lo tanto la media de hogares que no tienen dos o más ordenadores vendrá dada por: $1 - E[X] = 140 - 105 = 35$.

b) $$X : \mathcal{B}(140, 0.75) \implies \left\{ \begin{array}{l} n = 140 > 20 \checkmark \\ np = 105 > 5 \checkmark \\ nq = 35 > 5 \checkmark \end{array} \right\} \implies Y : \mathcal{N}(\underbrace{105}_{np}, \underbrace{5.1235}_{\sqrt{npq}})$$

$$\begin{aligned} P(98 < X < 112) &= P(98.5 < Y < 111.5) = P\left(\frac{98.5 - 105}{5.1235} < Z < \frac{111.5 - 105}{5.1235}\right) \\ &= P(-1.46 < Z < 1.27) = P(Z < 1.27) - P(Z < -1.46) \\ &= P(Z < 1.27) - P(Z > 1.46) = P(Z < 1.27) - \left[1 - P(Z < 1.46)\right] \\ &= 0.8980 - (1 - 0.9279) = 0.8259 \end{aligned}$$

Ejercicio 10 (2 *puntos*)

Durante el adiestramiento de un perro para encontrar trufas, se le deja libre una vez al día en una zona de monte apropiada para encontrar este preciado hongo. En cada operación de búsqueda del animal se ha observado que este se dirige siempre hacia una de tres zonas de monte diferentes, denominadas A, B y C. En dos de cada diez operaciones de búsqueda se dirige hacia A, en cinco de cada diez hacia B y el resto hacia C. El perro detecta trufas en A un 35 % de las veces, un 15 % en B y un 40 % en C. Eligiendo al azar un perro en adiestramiento, calcule la probabilidad de que:

a) (1 punto) Detecte una trufa en una operación de búsqueda.

b) (1 punto) Sabiendo que ha encontrado una trufa, esta haya sido encontrada en la zona B.

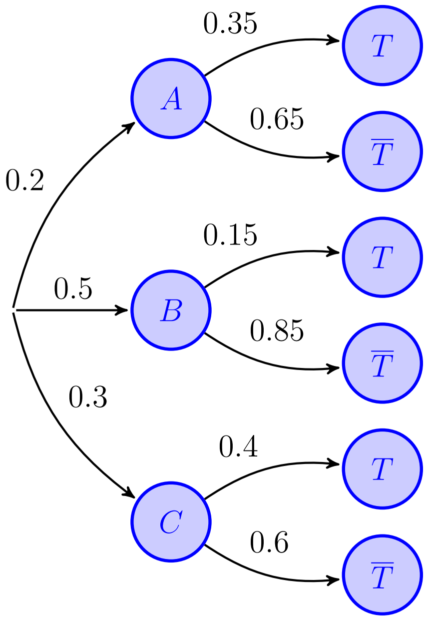
(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2024)

Solución.

Sean los sucesos:

$A \equiv$ "El perro se dirige a la zona A" $\quad B \equiv$ "El perro se dirige a la zona B"

$C \equiv$ "El perro se dirige a la zona C" $\quad T \equiv$ "El perro detecta trufas"



a) $$P(T) = P\Big((A\cap T)\cup(B\cap T)\cup(C\cap T)\Big)$$
$$= P(A\cap T) + P(B\cap T) + P(C\cap T)$$
$$= P(A)\cdot P(T \mid A) + P(B)\cdot P(T\mid B)$$
$$+ P(C)\cdot P(T\mid C) = 0.2\cdot 0.35$$
$$+ 0.5\cdot 0.15 + 0.3\cdot 0.4 = 0.265$$

b) $$P(B\mid T) = \frac{P(B\cap T)}{P(T)} = \frac{P(B)\cdot P(T\mid B)}{P(T)}$$
$$= \frac{0.5\cdot 0.15}{0.265} = 0.283$$