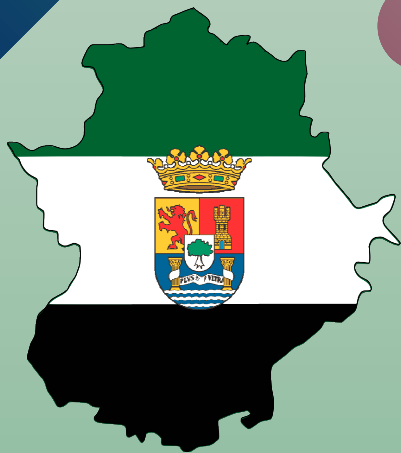
MATEMATICAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS



EVAU JULIO 2023
- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2023 (Extraordinario)

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ & $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Hallar la matriz X que sea solución de la ecuación matricial $X \cdot A - A^{\top} = B$, donde $A^{\top}$ es la matriz traspuesta de A. Justificar la respuesta.

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

$$X \cdot A - A^{\top} = B \implies X \cdot A = B + A^{\top} \implies X \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} = \left(B + A^{\top}\right) \cdot A^{-1}$$

$$\implies \boxed{X = \left(B + A^{\top}\right) \cdot A^{-1}}$$

$$B + A^{\top} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1 \quad \& \quad \mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \mathrm{Adj(A)}^{\top} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \left(B + A^{\top}\right) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} -9 & -5 & -2 \\ 10 & 2 & 2 \\ -7 & -1 & -2 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Sean las matrices siguientes: $A = \begin{pmatrix} -1 & x \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ & $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Se pide, justificando las respuestas:

a) *(1 punto) Determinar el valor de x para que se verifique que $A^2 = -I$.*

b) *(1 punto) Para el valor de x referido en el apartado a), determinar la matriz A^{43}*

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & x \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & x \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2x & 0 \\ 0 & 1-2x \end{pmatrix}$

$$A^2 = -I \implies \begin{pmatrix} 1-2x & 0 \\ 0 & 1-2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \implies 1-2x = -1 \implies \boxed{x = 1}$$

b) $A^{43} = A^{2\cdot 21+1} = \left(A^2\right)^{21} \cdot A = (-I)^{21} \cdot A = -I \cdot A = -A \implies \boxed{A^{43} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

> *Un charcutero vende lomos a 26 € el kilogramo, salchichones a 15 € el kilogramo y chorizos a 9 € el kilogramo. Durante un día vendió 60 kg de embutidos, cobrando por ellos 737 €. Sabiendo que el peso de los chorizos es el doble de lo que pesan conjuntamente los lomos y los salchichones, calcular, razonando la respuesta, cuántos kilogramos de cada tipo de embutido vendió ese día.*
>
> *(Extremadura - Matemáticas CCSS - Julio 2023)*

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{“Kg de lomo vendidos”} \\ y &\equiv \text{“Kg de salchichón vendidos”} \\ z &\equiv \text{“Kg de chorizo vendidos”} \end{aligned}$$

Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} x + y + z = 60 \\ 26x + 15y + 9z = 737 \\ z = 2 \cdot (x + y) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 60 \\ 26x + 15y + 9z = 737 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 26 & 15 & 9 & 737 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 26F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -11 & -17 & -823 \\ 0 & 0 & -3 & -120 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + 13y + 40z = 60 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -11y - 17 \cdot 40 = -823 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -3z = -120 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 7 \\ y = 13 \\ z = 40 \end{array}}$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

> *Una empresa fabrica móviles y tabletas que después vende a 720 euros y 540 euros la unidad, respectivamente. Por cuestiones logísticas, no puede fabricar semanalmente más de 800 móviles ni más de 600 tabletas, ni más de 1000 entre los dos productos. Suponiendo que vende todo el material que fabrica, calcular justificando las respuestas, el número de móviles y de tabletas que debe fabricar semanalmente para obtener unos ingresos máximos y el valor de dichos ingresos máximos.*
>
> *(Extremadura - Matemáticas CCSS - Julio 2023)*

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de móviles a fabricar semanalmente"
  $y \equiv$ "Nº de tabletas a fabricar semanalmente"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} (1)\ x \leq 800 & \to (800, 0) \\ (2)\ y \leq 600 & \to (0, 600) \\ (3)\ x + y \leq 1000 & \to (0, 1000) \quad \& \quad (1000, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

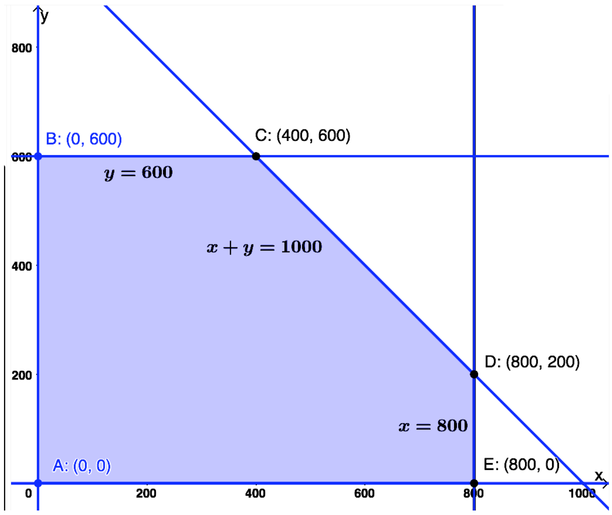
- `Función objetivo`

$$f(x, y) = 720x + 540y \quad \text{(euros)}$$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	600	324000
C	400	600	612000
D	800	200	684000
E	800	0	576000



Los *ingresos máximos* son de 684000 € y se obtienen fabricando y vendiendo 800 móviles y 200 tabletas.

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Una fábrica de materiales de construcción ha descubierto que la producción diaria de ladrillos no defectuosos (en toneladas), $P(x)$, depende de la dureza del material que utiliza, x, (en una escala del 0 al 10) de acuerdo con la función:

$$P(x) = -x^3 + 3Ax^2 - 3Bx + 23 \quad 0 \leq x \leq 10$$

Determinar, justificando la respuesta, las constantes A y B sabiendo que la producción mínima de ladrillos no defectuosos es de 13 toneladas y se alcanza cuando la dureza del material es de 1.

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

$$P(x) = -x^3 + 3Ax^2 - 3Bx + 23 \quad \& \quad P'(x) = -3x^2 + 6Ax - 3B \quad \& \quad P''(x) = -6x + 6A$$

- $P'(1) = 0 \implies -3 + 6A - 3B = 0 \implies 2A - B = 1 \odot$
- $P(1) = 13 \implies -1 + 3A - 3B + 23 = 13 \implies A - B = -3 \circledast$

$$\begin{array}{lcl} \odot\ 2A - B = 1 & \longrightarrow & 2A - \cancel{B} = 1 \\ \circledast\ A - B = -3 & \xrightarrow{\times(-1)} & \underline{-A + \cancel{B} = 3} \\ & & A \quad = 4 \implies \boxed{A = 4} \end{array}$$

$$A - B = -3 \implies 4 - B = -3 \implies \boxed{B = 7}$$

$$\boxed{P(x) = -x^3 + 12x^2 - 21x + 23} \quad \& \quad P'(x) = -3x^2 + 24x - 21 \quad \& \quad P''(x) = -6x + 24$$

Comprobamos que en efecto hay un mínimo en $(1, 13)$

$P''(1) = -6 + 24 = 18 > 0 \overset{(\cup)}{\implies}$ Mínimo relativo en $x = 1$

Veamos si el mínimo es también absoluto: $P(0) = 23$ & $P(10) = 13$. Por lo tanto con las constantes calculadas hay un mínimo absoluto en la producción de ladrillos no defectuosos de 13 toneladas, con una dureza del material de $x = 1$ o de $x = 10$.

Ejercicio 6 (2 *puntos*)

> *Una empresa constructora, tiene que afrontar gastos de suelo y gastos de edificación, (en miles de euros), que dependen de la distancia al centro, x, (en km). Dichos gastos vienen dados, respectivamente, por las funciones:*
>
> $$S(x) = 10x + 100 \quad , \; 0 \leq x \leq 25 \quad \& \quad E(x) = -x^2 + 10x + 200 \quad , \; 0 \leq x \leq 25$$
>
> *Determinar, justificando las respuestas:*
>
> *a) (0.5 puntos) La expresión $G(x)$ que indica los gastos totales de la constructora en función de la distancia al centro de la ciudad donde se realice la obra.*
>
> *b) (1.5 puntos) A qué distancias del centro los gastos de construcción son máximos y mínimos, así como el valor de dichos gastos.*
>
> *(Extremadura - Matemáticas CCSS - Julio 2023)*

Solución.

a) $G(x) = S(x) + E(x) = 10x + 100 + (-x^2 + 10x + 200) = -x^2 + 20x + 300 \; , 0 \leq x \leq 25$

b) $G'(x) = -2x + 20 = 0 \implies x = 10$

$G''(x) = -2 \implies G''(10) = -2 < 0 \overset{(\cap)}{\implies}$ Máximo relativo en $x = 10$
El máximo relativo es de $G(10) = 400$, veamos si es también absoluto:

$$G(0) = 300 \qquad \& \qquad G(25) = 175$$

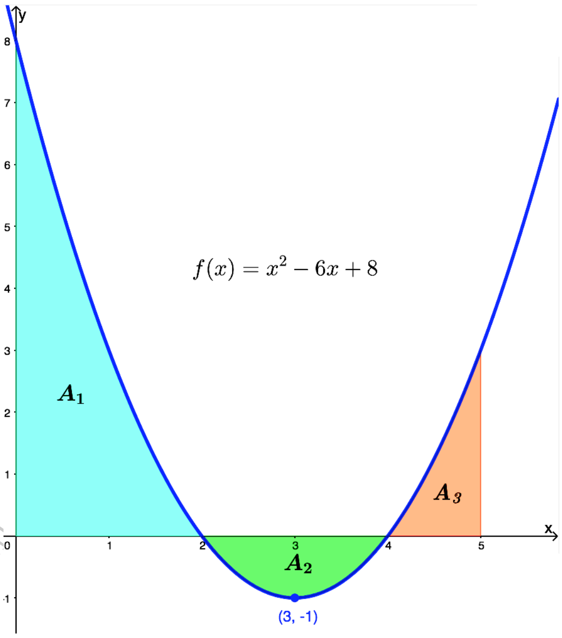
Luego el *gasto máximo* es de 400000 €, a 10 km del centro.
El *gasto mínimo* es de 175000 € a una distancia al centro de 25 km.

Ejercicio 7 (2 *puntos*)

> *Determinar el área delimitada por la función $f(x) = x^2 - 6x + 8$ y el eje OX entre los valores $x = 0$ y $x = 5$, representando dicha función y el área que se pide. Razonar las respuestas.*
>
> *(Extremadura - Matemáticas CCSS - Julio 2023)*

Solución.

- $f(x) = x^2 - 6x + 8$ es una parábola *convexa* ($\cup$), con vértice en $(3, -1)$, que corta a los ejes en $(0, 8)$ & $(2, 0)$ & $(4, 0)$.



$$A_1 = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \left(x^2 - 6x + 8\right) dx$$
$$= \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \Big]_0^2 = \frac{8}{3} - 12 + 16 = \frac{20}{3}$$
$$A_2 = \int_2^4 f(x)\,dx = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \Big]_2^4$$
$$= \left(\frac{64}{3} - 48 + 32\right) - \frac{20}{3} = \frac{16}{3} - \frac{20}{3} = -\frac{4}{3}$$
$$A_3 = \int_4^5 f(x)\,dx = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \Big]_4^5$$
$$= \left(\frac{125}{3} - 75 + 40\right) - \frac{16}{3} = \frac{20}{3} - \frac{26}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Área} = |A_1| + |A_2| + |A_3| = \frac{20}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{28}{3} = 9.33\ u^2$$

Ejercicio 8 (2 *puntos*)

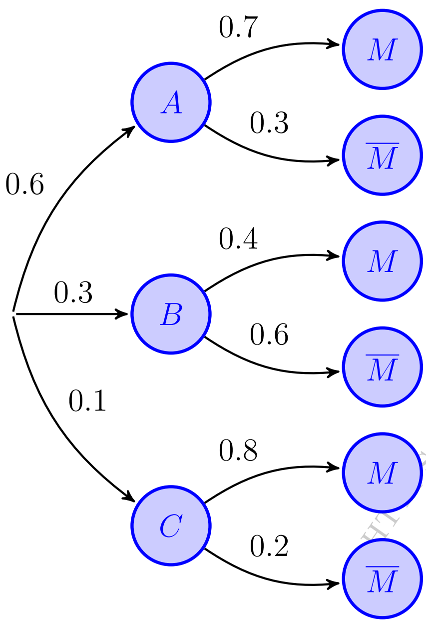
Un concesionario trabaja con tres marcas de coches: la marca A representa el $60\,\%$ de sus ventas, la B el $30\,\%$ y la C el resto. En un estudio acerca de las preferencias de los clientes sobre el cambio de marchas (manual, automático) se obtiene que el $70\,\%$ de los coches vendidos de la marca A, el $40\,\%$ de los de la marca B y el $80\,\%$ de los de la marca C tienen el cambio manual. Se pide, razonando la respuesta:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el concesionario venda un coche con cambio automático.

b) (1 punto) Sabiendo que un coche vendido tiene el cambio manual, calcular la probabilidad de que sea de la marca C.

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.



$A \equiv$ "El coche es de marca A"
$B \equiv$ "El coche es de marca B"
$C \equiv$ "El coche es de marca C"
$M \equiv$ "El coche tiene cambio manual"
$\overline{M} \equiv$ "El coche tiene cambio automático"

a) $$P(\overline{M}) = P\big((A\cap\overline{M})\cup(B\cap\overline{M})\cup(C\cap\overline{M})\big)$$
$$= P(A\cap\overline{M}) + P(B\cap\overline{M}) + P(C\cap\overline{M})$$
$$= P(A)\cdot P(\overline{M}\mid A) + P(B)\cdot P(\overline{M}\mid B)$$
$$+ P(C)\cdot P(\overline{M}\mid C) = 0.6\cdot 0.3$$
$$+ 0.3\cdot 0.6 + 0.1\cdot 0.2 = 0.38$$

b) $$P(C\mid M) = \frac{P(C\cap M)}{P(M)} = \frac{P(C)\cdot P(M\mid C)}{1-P(\overline{M})}$$
$$= \frac{0.1\cdot 0.8}{1-0.38} = 0.129$$

Ejercicio 9 (2 *puntos*)

Se realiza un estudio sobre el contenido de cierta sustancia en una marca de refrescos. De 500 latas analizadas, 120 contenían dicha sustancia. Calcular un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 95 %, para la proporción de latas de esta marca que contenían la sustancia. Razonar la respuesta.

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

$$n = 500 \quad \& \quad \hat{p} = \frac{120}{500} = 0.24 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.76 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.95$$

$$1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1 - \alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.24 \cdot 0.76}{500}} = 0.0374$$

$$I.C._{95\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) = (0.2026; 0.2774) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(p) = (20.26\,\%; 27.74\,\%)}$$

Ejercicio 10 (2 *puntos*)

Se pretende realizar un estudio sobre el contenido en alcohol de las cervezas, variable que sigue una distribución normal con desviación típica 1.5 grados. ¿Qué cantidad de cervezas habrá que analizar como mínimo si queremos obtener un intervalo de confianza para el contenido medio de alcohol, con un nivel de confianza del 99 % y una longitud no superior a 1 grado? Razonar la respuesta.

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

$$X \equiv \text{“Contenido de alcohol en las cervezas (grados)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 1.5)$$

$$n = ? \quad \& \quad 2E \leq 1 \implies E \leq 0.5 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.99$$

$$1 - \alpha = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0.01 \Rightarrow \alpha/2 = 0.005 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.575$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{1.5}{\sqrt{n}} \leq 0.5 \implies n \geq \left(2.575 \cdot \frac{1.5}{0.5}\right)^2 = 59.68 \implies \boxed{n = 60}$$
