MATEMATICAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JULIO 2023
- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2023 (Extraordinario)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Queremos medir el consumo de un coche eléctrico que tiene una batería de 50 kWh, y que tiene un consumo diferente si conducimos por autopista, por ciudad o por carretera de montaña. Hicimos tres salidas, cada una empezando con la carga completa de la batería, y pudimos recorrer las siguientes distancias hasta que se acabó la batería:

- ***Primer día:*** *180 km por autopista y 60 km por ciudad.*
- ***Segundo día:*** *200 km por ciudad y 80 km por carretera de montaña.*
- ***Tercer día:*** *150 km por autopista y 80 km por carretera de montaña.*

a) (7 puntos) Calcula el consumo del coche en cada uno de los tipos de carreteras.

b) (3 puntos) Si únicamnte lo utilizamos para conducir por ciudad, ¿cuál sería la cantidad total de km que podríamos recorrer con una carga completa de la batería?

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

a) Sean los sucesos:

$$x \equiv \text{“Consumo en autopista (kWh/km)”}$$
$$y \equiv \text{“Consumo en ciudad (kWh/km)”}$$
$$z \equiv \text{“Consumo en carretera de montaña (kWh/km)”}$$

Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} 180x + 60y = 50 \\ 200y + 80z = 50 \\ 150x + 80z = 50 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 18x + 6y = 5 \\ 20y + 8z = 5 \\ 15x + 8z = 5 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 18 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 20 & 8 & 5 \\ 15 & 0 & 8 & 5 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ 6F_3 - 5F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 18 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 20 & 8 & 5 \\ 0 & -30 & 48 & 5 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ 2F_3 + 3F_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 18 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 20 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 120 & 25 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow 18x + 6 \cdot \frac{1}{6} = 5 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 20y + 8 \cdot \frac{5}{24} = 5 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 120z = 25 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = \frac{2}{9} \simeq 0.2222 \\ y = \frac{1}{6} \simeq 0.1667 \\ z = \frac{5}{24} \simeq 0.2083 \end{array}}$$

b) Conduciendo por ciudad

$$\texttt{Autonomía} = \frac{50\ kWh}{1/6\ kWh/km} = 300\ km$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Un camión necesita transportar una carga de exactamente 12 metros cúbicos de volumen, y de exactamente 18 toneladas de peso. Puede transportar:

- `Arena`, *que pesa 1.6 toneladas por metro cúbico.*
- `Gravilla`, *que pesa 1.8 toneladas por metro cúbico.*
- `Ceniza`, *que pesa 0.5 toneladas por metro cúbico.*

a) (5 puntos) Si queremos llenar el camión solo con arena y ceniza, calcula qué cantidad de cada material nos permite alcanzar simultáneamente la máxima capacidad de volumen y la máxima capacidad de peso.

b) (5 puntos) Si queremos llenar el camión solo con arena y gravilla, no podemos alcanzar simultáneamente la máxima capacidad de volumen y la máxima capacidad de peso. Justifica por qué no.

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{“Cantidad de arena } (m^3)\text{”} \\ y &\equiv \text{“Cantidad de gravilla } (m^3)\text{”} \\ z &\equiv \text{“Cantidad de ceniza } (m^3)\text{”} \end{aligned}$$

a) Planteamos el sistema de ecuaciones y lo resolvemos por el método de Gauss:

$$\left\{\begin{array}{l} x + z = 12 \\ 1.6x + 0.5z = 18 \end{array}\right. \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 12 \\ 1.6 & 0.5 & 18 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 1.6F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 12 \\ 0 & -1.1 & -1.2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + \frac{12}{11} = 12 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -1.1z = -1.2 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = \frac{12}{11} \simeq 10.9091 \\ z = \frac{12}{11} \simeq 1.0909 \end{array}}$$

El sistema es compatible determinado y tiene solución única coherente con el enunciado del problema (volúmenes de arena y ceniza positivos).

b) Planteamos el nuevo sistema y resolvemos por el método de Gauss

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = 12 \\ 1.6x + 1.8y = 18 \end{array}\right. \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 12 \\ 1.6 & 1.8 & 18 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 1.6F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 12 \\ 0 & 0.2 & -1.2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x - 6 = 12 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 0.2y = -1.2 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 18 \\ y = -6 \end{array}}$$

El sistema es compatible determinado pero el volumen de la grava es negativo, lo que es incoherente con el sentido del problema, por lo tanto no tiene solución en nuestro contexto.

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

En una pastelería quieren promocionar sus productos ofreciendo dos ofertas:

- *Oferta A: 2 ensaimadas, 2 cocas de patata, 4 barras de chocolate, que se venderá a 4 €.*
- `Oferta B:` *6 ensaimadas, 3 cocas de patata, 3 barras de chocolate, que se venderá a 8 €.*

Disponen de 120 ensaimadas, 60 cocas de patata y 72 barras de chocolate. Suponiendo que todas las ofertas se venderán por completo, nos interesa calcular cuántas ofertas A y cuántas ofertas B deberían de ofrecer para maximizar el beneficio.

a) (3 puntos) Plantea la maximización de este beneficio como un problema de programación lineal en dos variables.

b) (5 puntos) Dibuja la región factible, indicando las rectas y vértices que la delimitan.

c) (2 puntos) ¿Cuántas ofertas A y cuántas ofertas B deberían ofrecer para maximizar el beneficio? ¿Cuál sería el beneficio en este caso?

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

	Oferta A	Oferta B	Restricción
Ensaimadas (ud.)	2	6	≤ 120
Cocas de patata (ud.)	2	3	≤ 60
Barras de chocolate (ud.)	4	3	≤ 72
Precio venta (€/oferta)	4	8	

- `Incógnitas:`

$$x \equiv \text{“N}^{\text{o}} \text{ de ofertas } A\text{”}$$
$$y \equiv \text{“N}^{\text{o}} \text{ de ofertas } B\text{”}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \ 2x+6y \leq 120 \\ ② \ 2x+3y \leq 60 \\ ③ \ 4x+3y \leq 72 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \ x+3y \leq 60 & \to (0,20) & \& & (60,0) \\ ② \ 2x+3y \leq 60 & \to (0,20) & \& & (30,0) \\ ③ \ 4x+3y \leq 72 & \to (0,24) & \& & (18,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo`

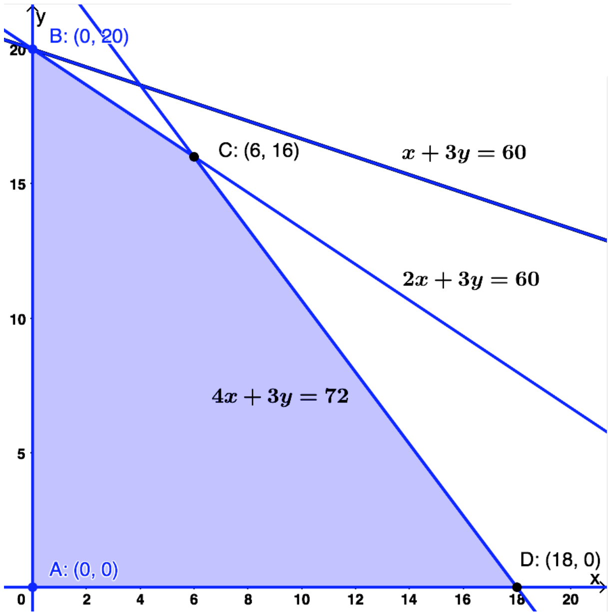
$$f(x,y) = 4x + 8y \quad \text{(euros)}$$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	0	0
B	0	20	160
C	6	16	152
D	18	0	72

El *beneficio máximo* es de 160 €, que se produce vendiendo tan solo 20 ofertas B.



Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

La temperatura de un objeto, t (en grados centígrados), cambia a medida que pasa el tiempo, s (en segundos), según el siguiente modelo:

$$t(s) = 45 \cdot e^{-0.08s} + 25 = 45 \cdot 0.923^s + 25 \quad , \text{ para } s \geq 0.$$

(Te proporcionamos dos expresiones algebraicas válidas y equivalentes, puedes utilizar la que prefieras).

a) *(7 puntos) Haz un gráfico esquemático de la función $t(s)$. Calcula o justifica, e indica sobre la gráfica: el dominio, el comportamiento en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales y globales.*

b) *(3 puntos) ¿A qué tenderá la temperatura del objeto cuando haya pasado mucho tiempo?*

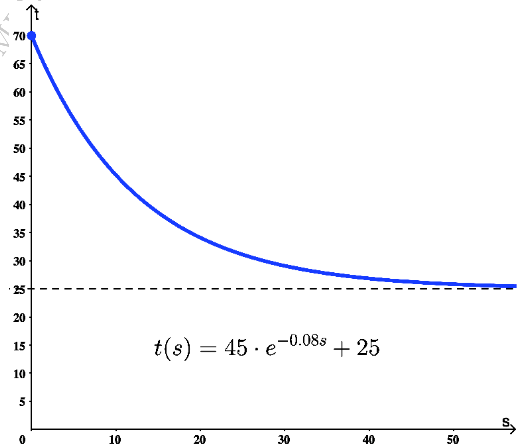
(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

a)
- `Dominio:` $\text{Dom}(t) = [0, +\infty)$
- `Asíntotas:`
  - `A. Vertical:` $\nexists A.V.$
  - `A.Horizontal:` $\exists \underset{s\to+\infty}{A.H.}$ en $t = 25$

$$\lim_{s\to+\infty} \left(45 \cdot e^{-0.08s} + 25\right) = 25$$

- `Monotonía:` $t'(s) = -3.6 \cdot e^{-0.08s} < 0$ $\implies$ $t(s)$ es *decreciente* en su dominio y no tienen extremos relativos. El máximo absoluto es (0.70)



- `Curvatura:` $t''(s) = 0.288 \cdot e^{-0.08} > 0 \implies t(s)$ es *convexa* $(\cup)$ en su dominio y no tiene puntos de inflexión.

b) Como la temperatura tiene una $\underset{s\to+\infty}{A.H.}$ en $t = 25$, indica que con el paso del tiempo la temperatura se aproximará a $25°C$.

Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)

Una maleta rectangular tienen tres medidas (anchura, altura y profundidad), y su volumen es el producto de las tres medidas. Queremos diseñar una maleta rectangular de 30 cm de profundidad, y de manera que la suma de la anchura, la altura y la profundidad sea de exactamente 110 cm. ¿Cuál es el volumen máximo que puede tener esta maleta?

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

Llamamos $x,\ y,\ z$ a las medidas del ancho, alto y profundo de la maleta:

$$\left.\begin{array}{l} z = 30 \\ x + y + z = 110 \end{array}\right\} \Longrightarrow\ y = 80 - x$$

$$V(x,y,z) = x \cdot y \cdot z \implies V(x) = x \cdot (80 - x) \cdot 30 = -30x^2 + 2400x$$

$$V'(x) = -60x + 2400 = 0 \implies x = 40$$

$$V''(x) = -60 \implies V''(40) = -60 < 0 \overset{(\cap)}{\Longrightarrow} \text{Máximo en } x = 40$$

Por tanto las dimensiones de la maleta que produce el máximo volumen son $x = 40$, $y = 80 - 40 = 40$ y $z = 30$ y el volumen es de $V(40) = -30 \cdot 40^2 + 2400 \cdot 40 = 48000\ cm^3$.

Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)

Tiramos dos dados no trucados. Considera los siguientes sucesos:

$A \equiv$ *"En el primer dado ha salido un 1".*
$B \equiv$ *"En el segundo dado ha salido un 1".*
$C \equiv$ *La suma de los valores de los dos dados es 3.*

a) *(3 puntos) Calcula* $P(A)$.

b) *(3 puntos) Calcula* $P(A \cup B)$.

c) *(4 puntos) ¿Son* C *y* $A \cup B$ *sucesos independientes?*

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

a) $P(A) = \dfrac{1}{6}$

b) $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{36}$$

c) Para ver si $A \cup B$ y C son independientes hemos de estudiar $P\Big((A \cup B) \cap C\Big)$, para lo cual hay que tener en cuenta que el suceso $(A \cup B) \cap C = \{(1,2),(2,1)\}$

$$\left.\begin{array}{l} P\Big((A \cup B) \cap C\Big) = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18} \\ P(A \cup B) \cdot P(C) = \dfrac{11}{36} \cdot \dfrac{1}{18} = \dfrac{11}{648} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left| \begin{array}{c} P\Big((A \cup B) \cap C\Big) \neq P(A \cup B) \cdot P(C) \\ \text{los sucesos } (A \cup B) \text{ y } C \\ \text{no son independientes} \end{array}\right.$$

Ejercicio 7 (2.5 *puntos*)

En una población:

- *las alturas de los hombres siguen una distribución normal de media* 1.76 *metros y desviación típica* 0.12 *metros; y*
- *las alturas de las mujeres siguen una distribución normal de media* 1.62 *metros y desviación típica* 0.11 *metros.*

Se pide:

a) (3 puntos) Escogemos un hombre al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que su altura sea mayor o igual a 1.76 *metros?*

b) (4 puntos) Escogemos una mujer al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que su altura sea mayor o igual a 1.76 *metros?*

c) (3 puntos) ¿Qué es más probable, que un hombre tenga una altura inferior a 1.76 *metros, o que una mujer tenga una altura inferior a* 1.76 *metros?*

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

$$X \equiv \text{“Altura de los hombres (m)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(1.76, 0.12)$$
$$Y \equiv \text{“Altura de las mujeres (m)”} \longrightarrow Y : \mathcal{N}(1.62, 0.11)$$

a) $P(X \geq 1.76) = P\left(Z \geq \dfrac{1.76 - 1.76}{0.12}\right) = P(Z \geq 0) = 1 - P(Z \leq 0) = 1 - 0.5 = 0.5$

b) $P(Y \geq 1.76) = P\left(Z \geq \dfrac{1.76 - 1.62}{0.11}\right) = P(Z \geq 1.27) = 1 - P(Z \leq 1.27)$

$= 1 - 0.8980 = 0.102$

c) $P(X < 1.76) = 1 - P(X \geq 1.76) = 1 - 0.5 = 0.5$

$P(Y < 1.76) = 1 - P(Y \geq 1.76) = 1 - 0.102 = 0.898$

Por lo tanto es más probable que una mujer tenga una altura inferior a 1.76 metros.

Ejercicio 8 (2.5 *puntos*)

Tiramos una moneda al aire 100 veces, y ha salido 46 veces cara y 54 veces cruz. Un estudiante cree que la moneda no está trucada, y propone aproximar el número de caras que salen en 100 tiradas como una variable aleatoria con distribución normal $\mathcal{N}(\mu = 50, \sigma = 5)$.

a) (3 puntos) Según la distribución propuesta, ¿cuál hubiese sido la probabilidad de obtenener 60 caras o más?

b) (4 puntos) Calcula el intervalo de confianza que contenga el 90 % de los valores más probables que aparecen en la distribución propuesta, ¿Es razonable la hipótesis de que la moneda no está trucada?

Ahora, tiraremos otra moneda al aire 100 veces, y el número de caras que obtendremos también seguirá una distribución normal $\mathcal{N}(\mu = 50, \sigma = 5)$. Sospecharemos que la moneda está trucada si el número de caras no está contenido en el intevalo calculado en el apartado anterior.

c) (3 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que sospechemos que la moneda está trucada?

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

a) $X \equiv$ "Nº de caras en 100 lanzamientos" $\longrightarrow X : \mathcal{N}(50, 5)$

$$P(X \geq 60) = P\Big(Z \geq \frac{60-50}{5}\Big) = P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

b) $X : \mathcal{N}(50, 5) \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.9$

$$1 - \alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies \alpha/2 = 0.05 \implies 1 - \alpha/2 = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sigma = 1.645 \cdot 5 = 8.225$$

$$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\mu - E; \mu + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (41.775; 58.225)}$$

Como el número de caras que ha salido en los 100 lanzamientos (46 caras) está dentro del $I.C._{90\,\%}(\mu)$, es razonable pensar que la moneda no está trucada.

c) En el apartado anterior hemos construido un intervalo de confianza con un nivel de confianza del 90 %, en el que se encuentran el número de caras que acreditan la moneda como no trucada. Por tanto la probabilidad de que una moneda sea considerada como trucada es del 10 %.