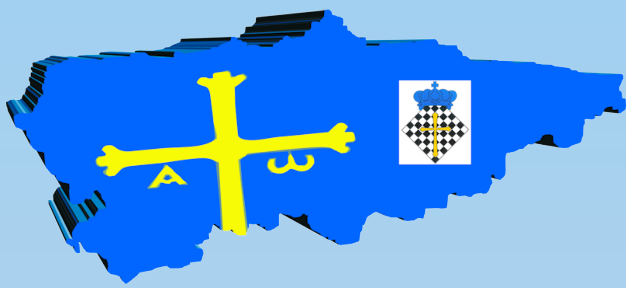
MATEMATICAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS



EVAU JULIO 2023

- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2023 (Extraordinario)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

En una fiesta se bebieron m copas de vino tinto por cada una de vino blanco. Cada copa (sea de vino tinto o blanco) contiene 0.15 litros y en total se tomaron $3m$ litros de vino.

a) (0.5 puntos) Plantea un sistema de dos ecuaciones en función del parámetro m donde las incógnitas x e y sean el número de copas de vino tinto y blanco, respectivamente.

b) (2 puntos) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Cuántas copas se tomaron de cada tipo si en total se consumieron 9 litros de vino?

(Asturias - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

a) Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{“N}^{\text{o}}\text{ de copas de vino tinto”}$$
$$y \equiv \text{“N}^{\text{o}}\text{ de copas de vino blanco”}$$

Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{m} = \dfrac{y}{1} \\ 0.15x + 0.15y = 3m \end{cases} \implies \begin{cases} x - my = 0 \\ x + y = 20m \end{cases}$$

b) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & 0 \\ 1 & 1 & 20m \end{array}\right) \implies |A| = 1 + m = 0 \implies m = -1$$

- Si $m \neq -1$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}\text{ incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).
- Si $m = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -20 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) = 1 \quad \& \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -20 \end{vmatrix} = -20 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 1 \neq \text{ran}(A^*) = 2 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA INCOMPATIBLE ($\nexists$ solución)

Si se consumieron 9 litros de vino $3m = 9 \implies m = 3$. Resolvemos el sistema:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 60 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 60 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x - 3 \cdot 15 = 0 \\ \Rightarrow 4y = 60 \end{array} \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 45 \\ y = 15 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Una empresa que usa dos tamaños de vehículos debe renovar su flota. Cada vehículo grande le costará 30000 euros; cada vehículo pequeño, 20000 euros y dispone de un presupuesto total de 500000 euros para comprar vehículos. Debe comprar a lo sumo el doble de vehículos grandes que pequeños. El mantenimiento anual de cada vehículo pequeño lo calcula en 300 euros; el de cada uno grande, en 600 euros y dispone de un presupuesto anual total de 9000 euros para mantenimiento.

a) (1.75 puntos) ¿Cuántos vehículos de cada tipo puede comprar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían comprar 8 vehículos grandes y 20 pequeños?

b) (0.75 puntos) El beneficio esperado por cada vehículo grande es de 10000 euros y por cada uno pequeño, de 6000 euros. ¿Cuántos vehículos debe comprar de cada tipo para maximizar el beneficio esperado? ¿Cuál sería ese beneficio esperado?

(Asturias - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

	Vehículo grande	Vehículo pequeño	Restricción
Coste (miles €/ud.)	30	20	≤ 500
Coste mantenimiento (€)	600	300	≤ 9000

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de vehículos grandes"
  $y \equiv$ "Nº de vehículos pequeños"

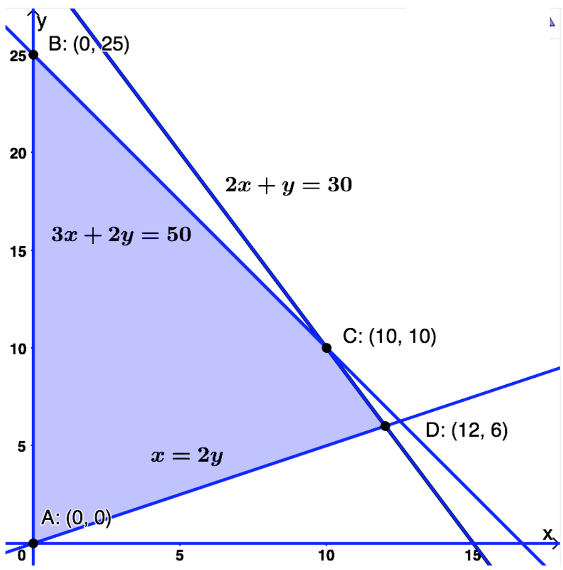
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ①\ 30x + 20y \leq 500 \\ ②\ x \leq 2y \\ ③\ 600x + 300y \leq 9000 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ①\ 3x + 2y \leq 50 & \to (0,25) \quad \& \quad (10,10) \\ ②\ x \leq 2y & \to (0,0) \quad \& \quad (20,10) \\ ③\ 2x + y \leq 30 & \to (0,30) \quad \& \quad (15,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x, y) = 10x + 6y$ (miles de €)

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	25	150
C	10	10	160
D	12	6	156



El *beneficio máximo* es de 160000 €, comprando 10 vehículos de cada tipo.
El punto $E : (8, 20) \notin R.F.$, por lo que no debe comprar 8 vehículos grandes y 20 pequeños.

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

El consumo energético de una comunidad de vecinos durante una mañana se ajusta aproximadamente a la siguiente función donde x representa las horas transcurridas desde las 6:00 de la mañana:

$$f(x) = \begin{cases} a\cdot(x+2) & \text{, si } 0 \le x \le 2 \\ 3\cdot(x^2-6x+12) & \text{, si } 2 < x \le 4 \\ -x^2+11x-16 & \text{, si } 4 < x \le 8 \end{cases}$$

a) *(0.75 puntos) Estudia la continuidad de la función. Determina el valor de a para que dicha función sea continua en todo su dominio.*

b) *(1.75 puntos) Considerando el valor de a obtenido en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente f en todo su dominio. ¿En qué momento el consumo es máximo? ¿Y mínimo?*

(Asturias - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

a)
- `Dominio:` $\text{Dom}(f) = [0,8]$
- `Continuidad en` $x=2$:
  - $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} a\cdot(x+2) = 4a$
  - $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} 3\cdot(x^2-6x+12) = 12$
  - $f(2) = 4a$

  $f(x)$ es continua en $x=2 \iff f(2) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) \implies 4a = 12 \implies \boxed{a=3}$
- `Continuidad en` $x=4$:
  - $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4} 3\cdot(x^2-6x+12) = 12$
  - $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4}\left(-x^2+11x-16\right) = 12$
  - $f(2) = 12$

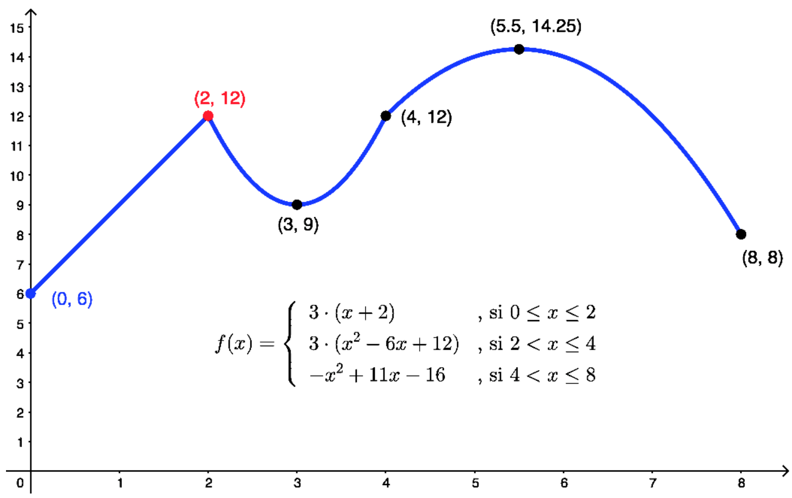
  $f(4) = \lim\limits_{x\to 4} f(x) \implies f(x)$ es continua en $x=4$

Por lo tanto, si $a=3$ la función es continua en todo su dominio, mientras que si $a \neq 3$, tendrá una discontinuidad inevitable de salto finito en $x=2$.

b) Para $a=3 \implies f(x) = \begin{cases} 3\cdot(x+2) & \text{, si } 0 \le x \le 2 \\ 3\cdot(x^2-6x+12) & \text{, si } 2 < x \le 4 \\ -x^2+11x-16 & \text{, si } 4 < x \le 8 \end{cases}$

- $3\cdot(x+2)$ es una recta creciente que pasa por $(0,6)$ & $(2,12)$
- $3\cdot(x^2-6x+12)$ es una parábola convexa $(\cup)$, con vértice en $(3,9)$, que pasa por $(2,12)$ & $(4,12)$
- $-x^2+11x-16$ es una parábola cóncava $(\cap)$ que pasa por $(4,12)$ & $(8,8)$ cuyo vértice está en $x=5.5$

El consumo máximo se produce en $x=5.5$, es decir a las 11:30 y valdrá 14.25, mientras que el mínimo estará en $x=0$, es decir, a las 6:00 y valdrá 6.



Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Dada la función $f(x) = e^x + 2$, se pide:

a) (0.5 puntos) Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(0) = 3$.

b) (2 puntos) Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -1$ y $x = 2$.

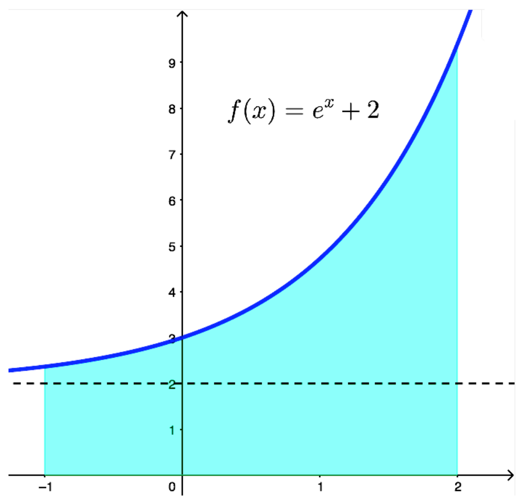
(Asturias - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

a) $F(x) = \int f(x)\,dx = \int (e^x + 2)\,dx = e^x + 2x + C \xrightarrow{F(0)=3} 1 + C = 3 \implies C = 2$

por lo tanto $\boxed{F(x) = e^x + 2x + 2}$

b)
- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- $f(x) = e^x + 2 > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \implies f(x)$ no corta al eje OX
- $x = 0 \implies y = e^0 + 2 = 3 \implies$ corte con OY en $(0, 3)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \implies \nexists \underset{x\to+\infty}{A.H.}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2 \implies \exists \underset{x\to-\infty}{A.H.}$ en $y = 2$
- $f'(x) = e^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \implies f(x)$ es creciente en todo su dominio.
- $f''(x) = e^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \implies f(x)$ es *convexa* $(\cup)$ en su dominio



$$Area = \int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{2} (e^x + 2)\,dx = e^x + 2x\Big]_{-1}^{2} = \left(e^2 + 4\right) - \left(e^{-1} - 2\right)$$
$$= e^2 - \frac{1}{e} + 6 \simeq 13.02\ u^2$$

Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)

El 80 % de los empleados de una empresa hablan inglés y el 25 % de todos los empleados hablan alemán. Además el 20 % de los empleados que hablan inglés, también hablan alemán.

a) (1.25 puntos) Elegido un empleado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que hable inglés pero no alemán?

b) (1.25 puntos) Elegido al azar un empleado entre los que hablan alemán, ¿cuál es la probabilidad de que no hable inglés?

(Asturias - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

Sean los sucesos:

$$I \equiv \text{“El empleado habla inglés”}$$
$$A \equiv \text{“El empleado habla alemán”}$$

Del enunciado tenemos:

$$P(I) = 0.8 \qquad \& \qquad P(A) = 0.25 \qquad \& \qquad P(A \mid I) = 0.2$$

a) $P(A \mid I) = \dfrac{P(A \cap I)}{P(I)} \Longrightarrow P(A \cap I) = P(I) \cdot P(A \mid I) = 0.8 \cdot 0.2 = 0.16$

$$P(I \cap \overline{A}) = P(I) - P(I \cap A) = 0.8 - 0.16 \Longrightarrow \boxed{P(I \cap \overline{A}) = 0.64}$$

b) $P(\overline{I} \mid A) = \dfrac{P(\overline{I} \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A) - P(A \cap I)}{P(A)} = \dfrac{0.25 - 0.16}{0.25} \Longrightarrow \boxed{P(\overline{I} \mid A) = 0.36}$

Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)

El 30 % de los pasajeros que volaron con una compañía aérea el mes pasado lo hicieron por trabajo. De ellos, el 80 % tienen tarjeta de fidelidad. Entre los pasajeros que volaron por causas diferentes al trabajo, el 40 % tienen tarjeta de fidelidad.

a) (1.25 puntos) Elegido un pasajero del mes pasado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga tarjeta de fidelidad?

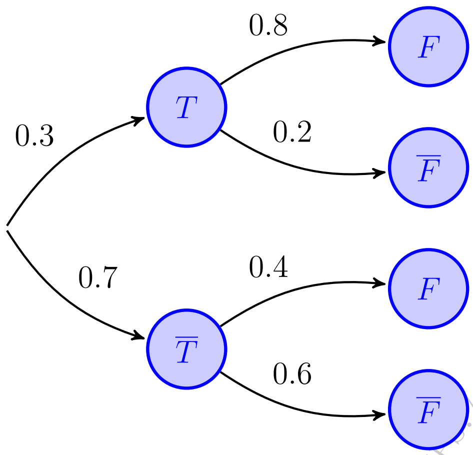
b) (1.25 puntos) Entre los pasajeros con tarjeta de fidelidad del mes pasado se eligió uno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que volase por trabajo?

(Asturias - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

Sean los sucesos:

$$T \equiv \text{“El pasajero voló por trabajo”}$$
$$F \equiv \text{“El pasajero tiene tarjeta de fidelidad”}$$



a) $$\begin{aligned} P(F) &= P\Big((T \cap F) \cup (\overline{T} \cap F)\Big) \\ &= P(T \cap F) + P(\overline{T} \cap F) \\ &= P(T) \cdot P(F \mid T) + P(\overline{T}) \cdot P(F \mid \overline{T}) \\ &= 0.3 \cdot 0.8 + 0.7 \cdot 0.4 = 0.52 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(T \mid F) &= \frac{P(T \cap F)}{P(F)} = \frac{P(T) \cdot P(F \mid T)}{P(F)} \\ &= \frac{0.3 \cdot 0.8}{0.52} = 0.46155 \end{aligned}$$

Ejercicio 7 (2.5 *puntos*)

En una región se realiza un estudio sobre jóvenes (menores de 25 años) con carné de conducir.⊛

a) (1 punto) Se quiere estimar el verdadero porcentaje de jóvenes que tienen carné de conducir con un nivel de confianza del 95 %, ¿cuál es el número mínimo de jóvenes que deberían ser entrevistados para que el error de estimación fuese menor o igual de 0.1?

b) (1.5 puntos) Finalmente, se tomó una muestra de 140 jóvenes y se observó que 120 tenían carné de conducir. Halla, con un nivel de confianza del 99 %, un intervalo para estimar la proporción de jóvenes que tienen carné de conducir en esa región.

⊛ *Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:*

$F(1.28) = 0.90 \quad F(1.64) = 0.95 \quad F(1.96) = 0.975 \quad F(2.33) = 0.99 \quad F(2.58) = 0.995$

(Asturias - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

a) $n = ? \qquad \& \qquad E \leq 0.1 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.95$

Al ser desconocida la proporción poblacional ($\hat{p}$), ya que aún no hay una muestra, tomamos la situación más desfavorable que es $\hat{p} = 0.5 \quad \& \quad \hat{q} = 1-\hat{p} = 1-0.5 = 0.5$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.5\cdot 0.5}{n}} \leq 0.1 \implies n \geq \left(\frac{1.96}{0.1}\right)^2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 96.04$$

$$\implies \boxed{n = 97}$$

b) $n = 140 \quad \& \quad \hat{p} = \dfrac{120}{140} = 0.8571 \quad \& \quad \hat{q} = 1-\hat{p} = 0.1429 \quad \& \quad 1-\alpha = 0.99$

$$1-\alpha = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0.01 \Rightarrow \alpha/2 = 0.005 \Rightarrow 1-\alpha/2 = 0.995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.58$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 2.58 \cdot \sqrt{\frac{0.8571\cdot 0.1429}{140}} = 0.0763$$

$$I.C._{99\,\%}(p) = (\hat{p}-E; \hat{p}+E) \implies \boxed{I.C._{99\,\%}(p) = (0.7808; 0.9334)}$$

Ejercicio 8 (2.5 *puntos*)

Un local que vende comida a domicilio trata de estimar el tiempo medio que sus repartidores tardan en entregar el pedido desde que lo recogen en el local. En una muestra de 200 *pedidos se obtuvo un tiempo medio de* 17.5 *minutos. Se supone que el tiempo de reparto de un pedido en mínutos, se puede aproximar por una distribución normal con desviación típica* 4 *minutos.*⊛

a) *(1.5 puntos) Construye un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del* 99 %*, para el tiempo medio de entrega de esos repartidores.*

b) *(1 punto) ¿Cuál es el error de estimación en el intervalo anterior? Si, basándonos en la misma muestra, quisiésemos obtener un intervalo de confianza con un nivel de confianza del* 99.5 %*, ¿el error sería mayor o menor que el obtenido en el apartado anterior?*

⊛ *Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media* 0 *y desviación típica* 1*:*

$F(1.28) = 0.90 \quad F(1.64) = 0.95 \quad F(1.96) = 0.975 \quad F(2.33) = 0.99 \quad F(2.58) = 0.995$

(Asturias - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

$$X \equiv \text{“Tiempo de reparto (minutos)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 4)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 4) \xrightarrow{n=200} \overline{x} = 17.5 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.99$

$1 - \alpha = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0.01 \Rightarrow \alpha/2 = 0.005 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.58$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.58 \cdot \dfrac{4}{\sqrt{200}} = 0.7297$

$I.C._{99\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{99\,\%}(\mu) = (16.7703; 18.2297)}$

b) $E = 0.7297$. Si aumentamos el nivel de confianza $(1 - \alpha)$, aumenta también $z_{\alpha/2}$, y por tanto el error $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.