MATEMATICAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2023

- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2023 (Ordinario)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

a) *(2 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a:*

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \\ x + ay + z = 2 \end{cases}$$

b) *(0.5 puntos) Resolverlo para $a = 0$.*

(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -a^2 + 3a - 2 = 0 \implies a = \{1, 2\}$$

- Si $a \neq \{1, 2\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

- Si $a = 2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 0$ por el método de Gauss, sabiendo que estamos ante un S.C.D.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\ F_1 \leftrightarrow F_3\ \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \\ \\ \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + 2 = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y - 2 = -3 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2z = 4 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Una empresa fabrica relojes smartwatch de dos tamaños de pantalla distintos: el tipo A, de 44 milímetros y el tipo B de 40 milímetros. Su producción semanal debe ser al menos de 10 relojes en total y el número de smartwatch que fabrica la empresa tipo B de 40 mm no puede superar en más de 10 unidades a los de tipo A. Los costes de producción de cada tipo de smartwatch son de 150 € para el tipo A y de 100 € los del B, disponiendo la empresa de un máximo de 6000 € a la semana para el coste total de producción. Además, se conoce que los relojes smartwatch tipo A generan un beneficio de 130 € y los de tipo B de 140 €.

a) *(1.5 puntos) Si la empresa quiere maximizar su beneficio, formule el problema que debe resolver y represente la región factible, calculando sus vértices.*

b) *(1 punto) ¿Cuántos smartwatch de cada tipo habrá que producir a la semana para que el beneficio total de la empresa sea máximo?, ¿Cuál es este beneficio máximo?*

(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de smartwathces tipo A"
  $y \equiv$ "Nº de smartwathces tipo B"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

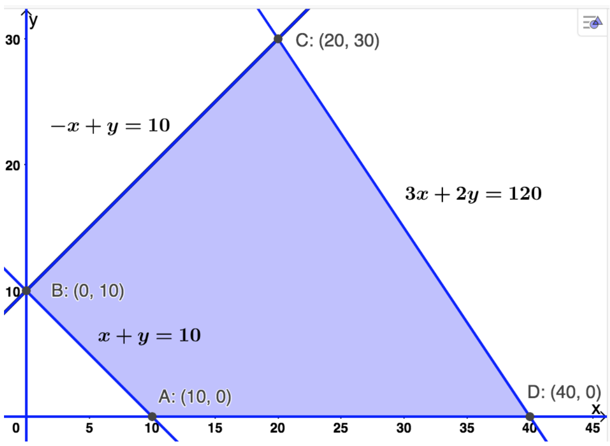
$$\begin{cases} ① \; x+y \geq 10 \\ ② \; y \leq x+10 \\ ③ \; 150x+100y \leq 6000 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \; x+y \geq 10 & \to (0,10) \quad \& \quad (10,0) \\ ② \; -x+y \leq 10 & \to (0,10) \quad \& \quad (-10,0) \\ ③ \; 3x+2y \leq 120 & \to (0,60) \quad \& \quad (40,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 130x + 140y$ (€)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	10	0	1300
B	0	10	1400
C	20	30	6800
D	40	0	5200



El *máximo beneficio* es de 6800 € y se obtiene produciendo y vendiendo 20 smartwatches del tipo A y 30 del tipo B.

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

La función de coste de una empresa es $C(q) = q^3 + 3q + 10$, donde q representa las unidades producidas. Sabiendo que el precio de venta, en euros, de cada unidad producida es $p = 30$, se desea conocer:

a) (0.5 puntos) La función de beneficio de esta empresa.

b) (1.5 puntos) El número de unidades producidas que maximiza el beneficio de la empresa. Razone su resultado.

c) (0.5 puntos) El beneficio máximo que puede lograr la empresa.

(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

a) $B(q) = I(q) - C(q) = 30q - (q^3 + 3q + 10) = -q^3 + 27q - 10$

b) $B'(q) = -3q^2 + 27 = 0 \implies \begin{cases} q = \cancel{-3} \text{ Absurdo!} \\ q = 3 \end{cases}$

	$(0, 3)$	$(3, +\infty)$
Signo $B'(q)$	+	-
$B(q)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

El beneficio $B(q)$ es *creciente* en $(0, 3)$ y *decreciente* en $(3, +\infty)$, y tiene un *máximo relativo*, que es también absoluto, produciendo $q = 3$ unidades.

c) El *máximo beneficio* asciende a $P(3) = 44$ €.

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Sea la función definida a trozos $f(x) = \begin{cases} 2+\sqrt{x} & , \textit{si } 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{8x-2}{2x} & , \textit{si } x > 1 \end{cases}$

a) (0.5 puntos) Estudiar la continuidad de la función en todo su dominio.

b) (1 punto) Estudiar el crecimiento o decrecimiento de la función en su dominio.

c) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 2$.

(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

a) Como las dos ramas son continuas en $\text{Dom}(f) = (0, +\infty)$, estudiamos la continuidad en la frontera $x = 1$.

- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \left(2 + \sqrt{x}\right) = 3$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{8x-2}{2x} = 3$
- $f(1) = 2 + \sqrt{1} = 3$

Como $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) \implies f(x)$ es continua en $x = 1$ y por tanto en $(0, +\infty)$.

b) $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \implies \nexists \text{ Sol.} & , \text{si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{8 \cdot 2x - (8x-2) \cdot 2}{4x^2} = \dfrac{1}{x^2} = 0 \implies \nexists \text{ Sol.} & , \text{si } x > 1 \end{cases}$

	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo $f'(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Creciente $\nearrow$

Y, como además la función es continua en $x = 1$, podemos afirmar que $f(x)$ es creciente en todo su dominio.

c) $x_0 = 2 \implies y_0 = f(x_0) = f(2) = \dfrac{7}{2} \implies (x_0, y_0) = (2, 7/2)$

$m_r = f'(x_0) = f'(2) = \dfrac{1}{4}$

$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \implies y - \dfrac{7}{2} = \dfrac{1}{4} \cdot (x - 2) \implies \boxed{r \equiv y = \dfrac{1}{4}x + 3}$

Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)

Dada la función $f(x) = \dfrac{2x^2}{9-x^2}$, *calcule:*

a) (0.5 puntos) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes.

b) (0.5 puntos) Asíntotas verticales y horizontales.

c) (1 punto) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) (0.5 puntos) Máximos y mínimos locales.

(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

a)
- `Dominio:` $9 - x^2 = 0 \implies x = \pm 3 \implies \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$
- `Corte con` OX: $f(x) = \dfrac{2x^2}{9-x^2} = 0 \implies 2x^2 = 0 \implies x = 0 \implies (0,0)$
- `Corte con` OY: $x = 0 \implies y = \dfrac{0}{9-0} = 0 \implies (0,0)$

b)
- `A. Vertical:` $\exists$ $A.V.$ en $x = -3$ y $x = 3$.

$$\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3} \frac{2x^2}{9-x^2} = \frac{18}{0} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to -3^-} f(x) = \frac{18}{0^-} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to -3^+} f(x) = \frac{18}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{2x^2}{9-x^2} = \frac{18}{0} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 3^-} f(x) = \frac{18}{0^+} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 3^+} f(x) = \frac{18}{0^-} = -\infty \end{cases}$$

- `A. Horizontal:` $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{9-x^2} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{2}{-1} = -2 \implies \underset{x\to\pm\infty}{A.H.}$ en $y = -2$

c) $f'(x) = \dfrac{4x\cdot(9-x^2) - 2x^2\cdot(-2x)}{(9-x^2)^2} = \dfrac{36x}{(9-x^2)^2} = 0 \implies 36x = 0 \implies x = 0$

	$(-\infty,-3)$	$(-3,0)$	$(0,3)$	$(3,+\infty)$
Signo $f'(x)$	-	-	+	+
$f(x)$	Decreciente $\searrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(0,3)\cup(3,+\infty)$ y *decreciente* en $(-\infty,-3)\cup(-3,0)$.

d) La función $f(x)$ tiene un *mínimo relativo* en $(0,0)$.

Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)

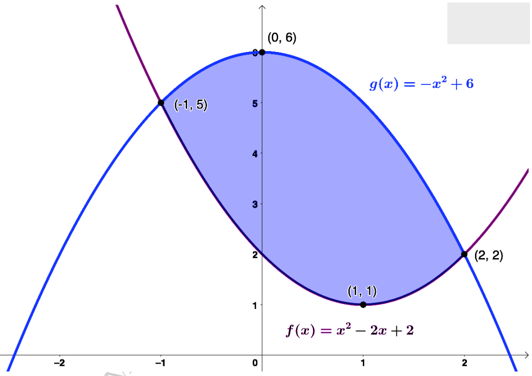
Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las parábolas $f(x) = x^2 - 2x + 2$ *y* $g(x) = -x^2 + 6$*. Calcular su área.*

(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

- $f(x) = x^2 - 2x + 2$ es una parábola *convexa* ($\cup$), que no corta al eje OX y cuyo vértice es $(1, 1)$.
- $g(x) = -x^2+6$ es una parábola *cóncava* ($\cap$), que corta al eje OX en $(-\sqrt{6}, 0)$ & $(\sqrt{6}, 0)$, y cuyo vértice es el $(0, 6)$.
- Los puntos de corte de ambas funciones son:

$$x^2 - 2x + 2 = -x^2 + 6 \implies x = \{-1, 2\}$$



$$Area = \int_{-1}^{2} \Big[g(x) - f(x)\Big]\, dx = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)\, dx = -\frac{2x^3}{3} + x^2 + 4x\Bigg]_{-1}^{2}$$

$$= \left(-\frac{16}{3} + 4 + 8\right) - \left(\frac{2}{3} + 1 - 4\right) = 9\ u^2$$

Ejercicio 7 (2.5 *puntos*)

Dada la función $f(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$:

a) *(1 punto) Calcular* $\int f(x)\, dx$

b) *(1.5 puntos) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función* $f(x)$*, y las rectas* $x = 1$ *y* $x = e$*.*

(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

a) $$\int f(x)\, dx = \int \frac{2\ln x}{x}\, dx = 2\int \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'} \cdot \underbrace{\ln x}_{u}\, dx = \cancel{2} \cdot \frac{(\ln|x|)^2}{\cancel{2}} + C = \ln^2|x| + C$$

b) $f(x) = \dfrac{2\ln x}{x} = 0 \implies 2\ln x = 0 \implies x = 1$, que junto con las rectas $x = 1$ y $x = e$, define un único recinto de integración: $A_1 : (1, e)$.

$$A_1 = \int_1^e f(x)\, dx = F(e) - F(1) = \ln^2 e - \ln^2 1 = 1 - 0 = 1$$

$$Area = |A_1| = 1\ u^2$$

Ejercicio 8 (2.5 *puntos*)

a) *La Dirección General de Tráfico ha realizado un estudio estadístico en la Región de Murcia sobre el uso de casco de protección por parte de los usuarios de patinetes eléctricos. El estudio estima que el* $60\,\%$ *de los usuarios de estos patinetes son hombres y, de estos, el* $30\,\%$ *usa el casco; mientras que, entre las mujeres que usan este medio para desplazarse, son el* $40\,\%$ *las que usan casco de protección. Si elegimos un usuario de patinete eléctrico al azar.*

   I) *(0.5 puntos) Calcule la probabilidad de que use casco de protección.*

   II) *(1 punto) Sabiendo que el usuario de patinete eléctrico usa casco de protección, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?*

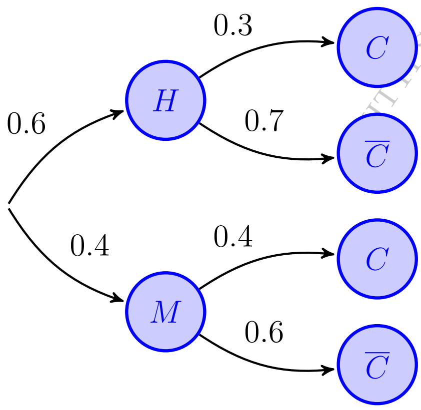
b) *(1 punto) El gasto medio por cliente, en euros, en la lotería de las pasadas Navidades se distribuye según una variable Normal de media desconocida y desviación típica igual de 10 euros. Se elige una muestra aleatoria de 225 clientes resultando que han tenido un gasto medio de 65 euros. Calcule un intervalo de confianza para el gasto medio de la lotería de Navidad de 2022 con un nivel de confianza del* $97\,\%$.

(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

Solución.

a) Sean los sucesos:

$$H \equiv \text{“El usuario del patinete es hombre”}$$
$$M \equiv \text{“El usuario del patinete es mujer”}$$
$$C \equiv \text{“El conductor del patinete usa casco”}$$



I) $$\begin{aligned} P(C) &= P\big((H\cap C)\cup(M\cap C)\big) \\ &= P(H\cap C)+P(M\cap C) \\ &= P(H)\cdot P(C\mid H)+P(M)\cdot P(C\mid M) \\ &= 0.6\cdot 0.3+0.4\cdot 0.4 = 0.34 \end{aligned}$$

II) $$\begin{aligned} P(M\mid C) &= \frac{P(M\cap C)}{P(C)} = \frac{P(M)\cdot P(C\mid M)}{P(C)} \\ &= \frac{0.4\cdot 0.4}{0.34} = 0.47057 \end{aligned}$$

b) $X \equiv \text{“Gasto en lotería (€)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 10)$

$X : \mathcal{N}(\mu,10) \xrightarrow{n=225} \overline{x} = 65 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.97$

$1-\alpha = 0.97 \implies \alpha = 0.03 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.015 \implies 1-{}^{\alpha}\!/_{2} = 0.985 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.17$

$E = z_{\alpha/2}\cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17\cdot\dfrac{10}{\sqrt{225}} = 1.447$

$I.C._{97\,\%}(\mu) = (\overline{x}-E;\overline{x}+E) \implies \boxed{I.C._{97\,\%}(\mu) = (63.553; 66.447)}$